Gerlach

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Selbst-Unterricht

bearbeitet

von

Dr. Hermann Gerlach,

Oberlehrer am Friedrich-Franz-Gymnasium zu Parchim.

Zweiter Theil.

Elemente der Planimetrie.

Zweite vermehrte und verbesserte Auflage.

Mit 127 neuen Figuren in Holzschnitt.

Dessau.

Verlag von A. Desbarats.

1867.

Druck von Weniger & Co. in Dessau.

Vorwort.

Der Plan, welcher dem Lehrbuche zu Grunde liegt, und die Bestimmung des letzteren für den Schul- und Selbstunterricht sind bereits im Vorworte zum ersten Theile eingehend besprochen worden, so daß es nicht nöthig sein wird, hierauf zurückzukommen. Hingegen veranlaßt die Gliederung des Inhaltes in vorliegendem Theile noch zu einigen Bemerkungen.

Die Haupteintheilung geht davon aus, daß sich die räumlichen Größen in zweifacher Art vergleichen lassen, als Quanta, oder als Quantitäten, und dem entsprechend zerfällt die Planimetrie in zwei größere Abschnitte. Der erste Abschnitt, welcher acht Capitel umfaßt, beschäftigt sich mit der Congruenz und der Ungleichheit der räumlichen Größen und den sich hieraus ergebenden Beziehungen, der zweite Abschnitt mit den Verhältnissen derselben, insoweit dadurch Inhalt und Gestalt bedingt werden. Die fernere Eintheilung des ersten Abschnittes entspricht im Allgemeinen der üblichen Eintheilung der ebenen Figuren, bedarf daher keiner weiteren Begründung. Nur in Betreff des fünften Capitels, welches von den geometrischen Aufgaben handelt, mag bemerkt werden, daß es aus didaktischen Gründen der Lehre vom Kreise vorangestellt ist, daß es jedoch keine Behauptung enthält, welche sich nicht aus dem Vorangehenden begründen ließe. Der zweite größere Abschnitt der Planimetrie würde seinem Inhalte nach wiederum in zwei Theile zerfallen können, die von der Ausmessung und Aehnlichkeit der ebenen Figuren handelten, aber wegen der vielfachen Beziehungen zwischen Größe und Gestalt

wäre hier eine scharfe Trennung den Zwecken des Unterrichts nicht förderlich, wenngleich sie theoretisch möglich ist. Die Lehre von den proportionirten Linien im weitesten Sinne läßt sich im Zusammenhange darstellen, ohne daß von der Ausmessung der ebenen Figuren vorher die Rede gewesen sein müßte; es läßt sich auch zeigen, daß aus vier proportionirten Linien jedesmal zwei gleiche Rechtecke gebildet werden können. Diese Art der Darstellung ist indessen nicht frei von einer gewissen Einseitigkeit. Man würde, wie üblich, ein Rechteck durch die Form eines Produktes bezeichnen, aber unter dieser Form dürfte dann immer nur das gezeichnete Rechteck, nicht der Inhalt desselben verstanden werden. Eine solche Forderung läßt sich jedoch beim Unterrichte nur vorübergehend stellen, nicht andauernd, und es erscheint weit natürlicher, bei dieser Gelegenheit auch die Zahlenwerthe zu berücksichtigen, um so mehr, als die Schüler schon in den unteren Klassen das Wesentlichste über die Ausmessung der Rechtecke zu erfahren pflegen. Aus diesem Grunde ist die Ausmessung der Ebenen schon im zehnten, die Proportionalität der Linien erst im zwölften Capitel behandelt worden.

Der speciellen Eintheilung, wie sie im Inhaltsverzeichnisse vorliegt, wird zugestanden werden können, daß ein allmählicher Uebergang vom Leichteren zum Schwereren stattfindet, und daß die Probleme, die ihrem Inhalte nach zusammengehören, nur selten und dann nur aus didaktischen Gründen von einander getrennt worden sind. Ob dabei im Einzelnen die wissenschaftliche Strenge gewahrt sei, ob jeder Fortschritt eine gesicherte Grundlage habe, ob die getroffene Anordnung nicht zu künstlichen Beweisen veranlasse, diese und ähnliche Fragen möge das Buch selbst zu beantworten suchen. Als Abschnitte, welche sich ohne Störung des Zusammenhanges vorläufig überschlagen lassen, sind die zweite Hälfte des elften Capitels und der Anhang zum zwölften und dreizehnten Capitel zu bezeichnen.

Neben den Lehrsätzen enthält das Buch eine ziemliche Anzahl von Aufgaben. Diejenigen, welche zum Verständniß des

theoretischen Theiles nothwendig sind, welche also der Schüler kennen muß, ferner diejenigen, welche eine häufige Anwendung im praktischen Leben finden, sind vollständig gelöst. Dagegen sind solche, bei denen es weniger wichtig ist, die Auflösung zu kennen, als sie gefunden zu haben, den einzelnen Capiteln nur als Uebungsaufgaben beigefügt. Diese sind nicht nach ihrer größeren oder geringeren Schwierigkeit geordnet, sondern haben immer eine solche Stelle erhalten, daß die Sätze der vorangehenden Capitel zur Lösung ausreichen. Es mag hierbei nochmals auf die früher gemachte Bemerkung hingewiesen werden, daß es bedenklich sein würde, die Fertigkeit der Schüler im selbständigen Lösen geometrischer Aufgaben als Maßstab der Leistungen, die Uebung hierin als wichtigsten Theil des Unterrichtes zu betrachten. Dadurch wird nicht ausgeschlossen, daß der Unterricht den Schüler anleiten müsse, das gewonnene geistige Eigenthum selbständig zu benutzen und zu verwerthen.

Von der früheren Auflage unterscheidet sich die jetzige besonders dadurch, daß die Abschnitte vom geometrischen Orte und den geometrischen Aufgaben neu aufgenommen sind, und daß im zehnten und elften Capitel die Darstellung vereinfacht worden ist.

Die äußere Ausstattung ist wesentlich verbessert worden, indem der Herr Verleger trotz der dadurch bedeutend vermehrten Unkosten sämmtliche Holzschnitte hat neu anfertigen lassen.

H. Gerlach.

Inhalt.

Planimetrie.

Berichtigungen.

Seite 7, Zeile 1 lies den statt die.
" 96, §. 157, Zeile 4 lies Beh. m : n statt Beh. n : m.
" 112, §. 159, letzte Zeile lies

$$4)\ r = z : \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{statt} \quad 4)\ r = z \,.\, \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

" 118, §. 166, e, Zeile 5 lies Dreiecks- statt Dreiecks.

Elemente

der

Planimetrie.

Einleitung.

§. I. Erklärung.

Ein Körper ist ein von allen Seiten begränzter Raum. Ein Körper wird begränzt durch Flächen, eine Fläche durch Linien, eine Linie durch Punkte. Ein Körper erstreckt sich nach Länge, Breite und Tiefe, hat also drei Ausdehnungen; eine Fläche erstreckt sich nach Länge und Breite, eine Linie nur nach der Länge. Ein Punkt hat keine Ausdehnung. Körper, Flächen und Linien heißen räumliche Größen, und mit diesen beschäftigt sich die Geometrie.

§. II. Erklärung.

Die Linien sind entweder gerade, oder gebrochen, oder gekrümmt. Eine gerade Linie ändert ihre Lage nicht, wenn man sich dieselbe um zwei ihrer Punkte gedrehet denkt; eine gebrochene Linie ist aus mehreren geraden Linien zusammengesetzt, ohne selbst gerade zu sein; die übrigen Linien heißen gekrümmt.

Die Flächen sind entweder eben, oder gebrochen, oder gekrümmt. Bei einer ebenen Fläche oder Ebene fallen sämmtliche geraden Verbindungslinien je zweier Punkte vollständig mit der Fläche zusammen; die gebrochene Fläche ist aus verschiedenen Ebenen zusammengesetzt, ohne selbst eine Ebene zu sein; die übrigen Flächen heißen gekrümmt.

Linien und Flächen können unbegränzt, vollständig oder theilweise begränzt, oder in sich zurücklaufend sein. Eine vollständig begränzte Fläche heißt Figur; die sie begränzende gebrochene oder krumme Linie heißt ihr Umfang. Man versteht jedoch auch unter einer Figur im weiteren Sinne jede Darstellung räumlicher Größen durch Zeichnung.

§. III. Erklärung.

Die Geometrie zerfällt in Planimetrie und Stereometrie.

Die Planimetrie beschäftigt sich mit solchen räumlichen Größen, deren einzelne Theile sämmtlich in derselben Ebene liegen, die Stereometrie mit solchen, deren einzelne Theile in verschiedenen Ebenen liegen.

§. IV. Grundsätze.

Unter den in der allgemeinen Größenlehre aufgestellten Sätzen, welche für Größen jeder Art gelten, sind folgende hervorzuheben:

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.
2) Sind zwei Größen gleich einer dritten, so sind sie sich selbst gleich.
3) Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.
4) Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.
5) Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt Gleiches.
6) Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches.
7) Das Ganze ist größer als sein Theil.
8) Ist eine Größe gleich einer zweiten und diese kleiner als eine dritte, so ist die erste kleiner als die dritte.
9) Ist eine Größe kleiner als eine zweite und diese kleiner als eine dritte, so ist die erste kleiner als die dritte.

Planimetrie.

Erstes Capitel.

Von den Linien und Winkeln.

§. 1. Grundsatz.

Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich.

Anm. 1. Eine begränzte gerade Linie kann als gegeben betrachtet werden, wenn ihre beiden Endpunkte bekannt sind; sie läßt sich alsdann entweder wirklich ziehen, oder doch gezogen denken.

Anm. 2. Eine gegebene begränzte gerade Linie läßt sich beliebig verlängern, oder verlängert denken. Alle diese Verlängerungen liegen alsdann in ein und derselben unbegränzten geraden Linie, und letztere ist daher ihrer Richtung (Lage) nach bekannt, wenn man ein beliebiges Stück oder zwei beliebige Punkte derselben kennt.

Anm. 3. Die geraden Linien zieht man mit Hülfe des Lineals. Um die Richtigkeit eines solchen zu prüfen, verbindet man mit demselben zwei Punkte zweimal durch eine feine Linie, indem man es erst auf der einen, dann auf der andern Seite der beiden Punkte mit der nämlichen Kante anlegt. Fallen die beiden so gezogenen Linien auf einander, so ist das Lineal richtig.

§. 2. Erklärung.

Eine begränzte gerade Linie ist gleich einer andern, wenn sie sich so auf dieselbe gelegt denken läßt, daß die Endpunkte sich decken; hingegen ist sie kleiner als die andere (größere), wenn sie sich so auf dieselbe gelegt denken läßt, daß ihre Endpunkte zwischen die der andern fallen.

§. 3. Erklärung.

Die gerade Linie, welche zwei gegebene Punkte verbindet, nennt man die Entfernung dieser Punkte.

Alle Punkte, welche von einem gegebenen Punkte*) gleichweit entfernt sind, liegen in einer gekrümmten, in sich zurücklaufenden Linie. Die von derselben begränzte Ebene nennt man einen Kreis, den Umfang desselben Kreislinie oder Peripherie des Kreises, den gegebenen Punkt den Mittelpunkt ooer das Centrum, die Entfernung eines Punktes der Peripherie vom Centrum einen Halbmesser oder Radius, ein Stück der Peripherie einen Bogen.

Anm. 1. Wenn der Sinn nicht zweifelhaft sein kann, gebraucht man das Wort Kreis auch im Sinne von Kreislinie.

Anm. 2. Die Kreislinie beschreibt man mit Hülfe des Zirkels.

§. 4. Erklärung.

Zwei nicht auf einander fallende gerade Linien schneiden sich, wenn sie einen Punkt gemeinschaftlich haben, ohne von demselben begränzt zu sein, hingegen stoßen sie zusammen, wenn sie von dem gemeinschaftlichen Punkte begränzt werden. Der gemeinschaftliche Punkt heißt im ersteren Falle der Durchschnittspunkt, im letzteren der Treffpunkt. Mehr als einen Durchschnitts- oder Treffpunkt können zwei gerade Linien nicht haben, weil zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist.

Zwei nicht auf einander fallende krumme Linien, oder eine gerade und eine krumme, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, können sich in diesem Punkte schneiden, oder in demselben berühren. Im erstern Falle liegt die eine Linie diesseits und jenseits des gemeinschaftlichen Punktes auf verschiedenen Seiten der anderen Linie, im letzteren Falle auf der nämlichen Seite. Der gemeinschaftliche Punkt heißt im ersteren Falle Durchschnittspunkt, im letzteren Berührungspunkt.

§. 5. Erklärung.

Zwei Linien**), die aus ein und demselben Punkte gezogen sind, haben dieselbe Richtung, wenn sie sich ganz oder theilweise decken, in den übrigen Fällen eine verschiedene. Den Unterschied in der Richtung zweier zusammenstoßenden Linien oder die Abweichung (Neigung) derselben nennt man einen ebenen Winkel, die beiden Linien die Schenkel desselben, ihren Treffpunkt den Scheitel, die durch die Schenkel begränzte Ebene die Winkelebene.

Man bezeichnet einen Winkel ($\angle$) entweder durch drei Buchstaben, von denen der mittlere am Scheitel steht, jeder der anderen an einem belie-

*) Es wird vorausgesetzt, daß alle diese Punkte in derselben Ebene liegen.

**) Das Wort „Linie“ ohne Zusatz bezeichnet von jetzt an Gerade.

bigen Punkte je eines Schenkels, oder durch einen einzigen Buchstaben, die man am Scheitel zwischen die beiden Schenkel schreibt.

§. 6. Erklärung.

Ein Winkel ist gleich einem andern, wenn die Winkelebenen sich so auf einander gelegt denken lassen, daß die Schenkel der Richtung nach zusammenfallen; hingegen ist er kleiner als der andere (größere), wenn sich eine solche Lage der beiden Ebenen denken läßt, daß die Scheitel sich decken, aber die Schenkel des ersteren Winkels innerhalb der Ebene des anderen liegen. Die Größe eines Winkels ist also unabhängig von der Länge der Schenkel.

Ein Winkel ist in gleiche Theile getheilt, wenn aus seinem Scheitel in der Winkelebene Linien gezogen sind, von denen je zwei auf einander folgende die nämliche Abweichung haben. Ein Winkel läßt sich daher messen und als benannte Zahl darstellen, kann daher auch z. B. gleich der Summe oder gleich der Differenz zweier anderen Winkel sein.

Anm. Die Zunahme oder Abnahme in der Größe eines Winkels kann man sich versinnlichen, wenn man sich den einen Schenkel ruhend, den andern bewegt denkt, ähnlich dem Zeiger einer Uhr. Der Winkel, den beide Schenkel bei einer beliebigen Stellung bilden, giebt an, wie weit der bewegte Schenkel in der Umdrehung vorgeschritten ist.

§. 7. Erklärung.

Ein Winkel, dessen Schenkel eine gerade Linie bilden und entgegengesetzte Lage haben, heißt ein gestreckter oder flacher. Die gestreckten Winkel sind einander gleich (§. 6) und werden durch den Buchstaben π bezeichnet.

Ein Winkel heißt hohl (concav), wenn er kleiner, und heißt erhaben (convex), wenn er größer ist als ein gestreckter.

Die hohlen Winkel werden eingetheilt in rechte, spitze und stumpfe. Ein rechter Winkel ist die Hälfte eines gestreckten. Die rechten Winkel sind folglich einander gleich (§. 6) und werden bezeichnet durch $\frac{\pi}{2}$, oder durch R, daher die gestreckten auch durch 2R. Ein spitzer Winkel ist kleiner, ein stumpfer ist größer als ein rechter.

Der rechte Winkel wird eingetheilt in 90 Grade (90^0), der Grad in 60 Minuten ($60'$), die Minute in 60 Secunden ($60''$).

Anm. Die Winkel werden mit Hülfe des Transporteurs gezeichnet, die rechten indessen gewöhnlich mit dem Winkelhaken.

§. 8. Erklärung.

Zwei Linien stehen senkrecht (lothrecht) auf einander, wenn sie einen rechten, und stehen schief, wenn sie einen spitzen (oder stumpfen) Winkel bilden.

Nach der Erklärung des rechten Winkels läßt sich auf einer Linie in einem gegebenen Punkte derselben nur eine Senkrechte errichtet denken.

§. 9. Erklärung.

Zwei Winkel, deren Summe gleich zwei Rechten ist, heißen Supplementwinkel; liegen sie so neben einander, daß zwei Schenkel sich decken, und die beiden anderen einen gestreckten Winkel bilden, so heißen sie auch Nebenwinkel.

Zwei Winkel, deren Summe gleich einem Rechten ist, heißen Complementwinkel.

Zwei (hohle) Winkel, von denen jeder durch die rückwärts verlängerten Schenkel des andern gebildet wird, heißen Scheitelwinkel.

Anm. Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist wiederum ein rechter. Man prüft daher einen Winkelhaken, indem man einen Winkel mit demselben zeichnet und den Nebenwinkel mit dem Winkelhaken vergleicht.

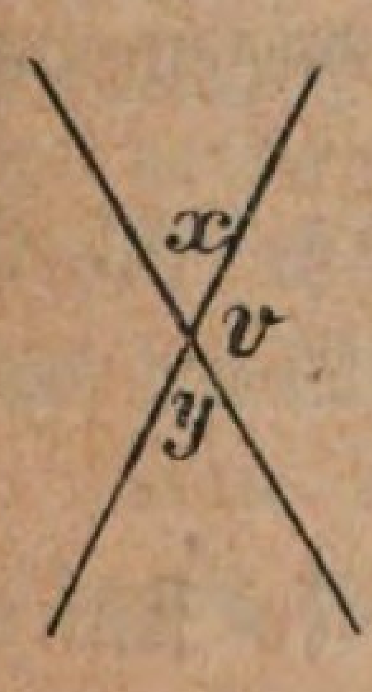
§. 10. Lehrsätze.

1) Zu gleichen Winkeln gehören gleiche Supplement- und gleiche Complementwinkel.

Beweis. Er folgt aus §. 9. Es muß hierbei eine solche Größe der beiden gleichen Winkel vorausgesetzt werden, daß sie Supplement- oder Complementwinkel haben.

2) Jeder Winkel ist gleich seinem Scheitelwinkel.

Fig. 1.



Voraussetzung *). x und y sind Scheitelwinkel.

Behauptung. $x = y$.

Beweis. Es ist $x + v = 2R$,

ebenso $y + v = 2R$,

also $x + v = y + v$

und $x = y$.

---

*) Die Voraussetzung (hypothesis) giebt die Eigenschaften an, welche eine Figur unzweifelhaft haben soll, die Behauptung (thesis) diejenigen, welche der Lehrsatz aus der Voraussetzung ableiten will.

Uebungssätze.

1) Die Summe sämmtlicher um einen Punkt herumliegenden Winkel beträgt 4R.

2) Die Halbirungslinien zweier Nebenwinkel stehen senkrecht auf einander.

3) Die Halbirungslinien zweier Complementwinkel bilden einen Winkel von 45 Graden.

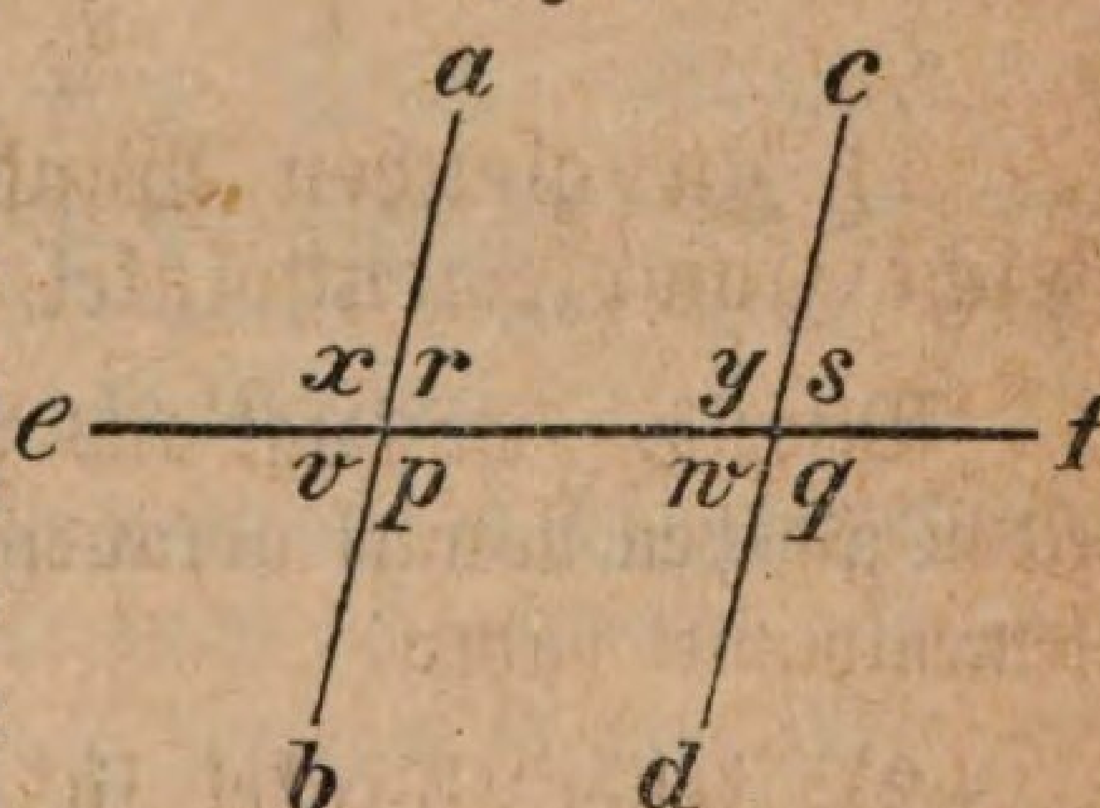
Zweites Capitel.

Von den parallelen, convergenten und divergenten Linien.

§. 11. Erklärung.

Werden zwei Linien von einer dritten durchschnitten, so entstehen acht Winkel (Fig. 2). Von diesen nennt man je vier, welche auf derselben Seite der durchschneidenden Linie liegen, Winkel auf gleicher Seite; ferner nennt man x, v, s, q äußere, r, p, y, w innere Winkel.

Fig. 2.



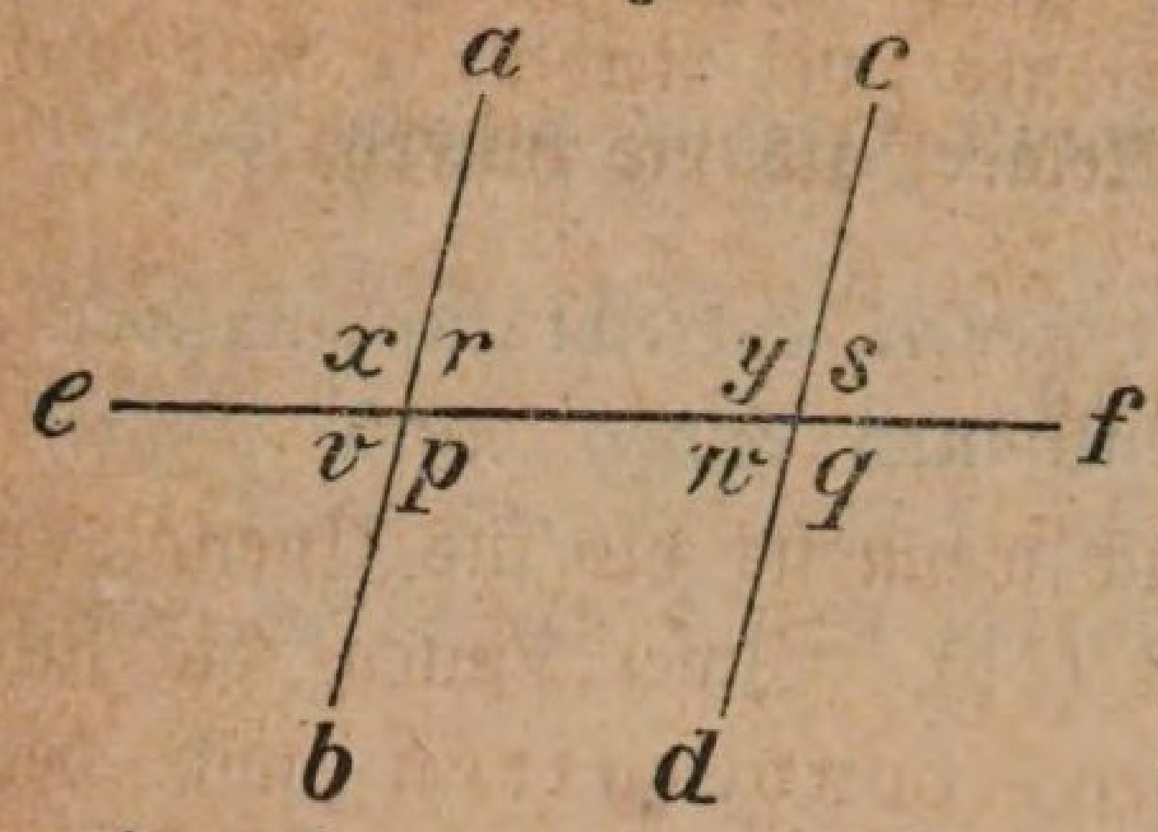
Je zwei dieser Winkel heißen Gegenwinkel, wenn sie auf derselben Seite der durchschneidenden Linie und auf denselben Seiten der durchschnittenen Linien liegen; sie heißen Wechselwinkel, wenn sie auf verschiedenen Seiten der durchschneidenden Linie und auf verschiedenen Seiten der durchschnittenen Linien liegen, und zwar heißen sie innere oder äußere Wechselwinkel, je nachdem sie innere oder äußere Winkel sind.

Es sind also x und y, s und r, v und w, q und p Gegenwinkel, r und w, y und p innere, x und q, s und v äußere Wechselwinkel.

§. 12. Lehrsätze.

1) Sind zwei Gegen- oder Wechselwinkel gleich, so sind es auch die übrigen Gegen- und Wechselwinkel. Ferner betragen alsdann je zwei innere oder äußere Winkel auf gleicher Seite zusammen zwei Rechte.

Fig. 3.



Vor. $x = y$.

Beh. $s = r$;

$r + y = 2R$.

Beweis. Ist $x = y$, so sind auch die Nebenwinkel von x und y einander gleich (§. 10, 1), und es ist folglich $r = s$. Da ferner $x + r = 2R$, und $x = y$ ist, so muß auch $y + r = 2R$ sein.

Für die übrigen Winkelpaare wird der Beweis in ähnlicher Art geführt. Bezeichnet man indessen die gleichen Winkel x und y und ihre Scheitelwinkel p und q sämmtlich durch x, ebenso die gleichen Winkel s und r und ihre Scheitelwinkel w und v sämmtlich durch s, so ergiebt sich der weitere Beweis unmittelbar aus der Figur. — Sind zwei Wechselwinkel gleich, so wird der Beweis in derselben Art geführt.

2) Betragen zwei innere oder äußere Winkel auf gleicher Seite zusammen zwei Rechte, so sind je zwei Gegen- und Wechselwinkel gleich. (Fig. 3.)

Vor. $r + y = 2R$.

Beh. $x = y$.

Beweis. Es ist $r + y = 2R$ (nach der Voraussetzung),

ferner $r + x = 2R$ (nach der Figur).

Folglich ist $x = y$.

Die Gleichheit der übrigen Gegen- und Wechselwinkel folgt aus 1.

§. 13. Lehrsatz.

Sind zwei Gegen- oder Wechselwinkel ungleich, so sind es auch die übrigen Gegen- und Wechselwinkel. Ferner betragen alsdann je zwei innere oder äußere Winkel auf gleicher Seite mehr oder weniger als zwei Rechte. Ist umgekehrt Letzteres der Fall, so sind je zwei Gegen- und Wechselwinkel ungleich.

Beweis. Er wird ähnlich geführt, wie in §. 12 die Beweise zu 1 und 2.

Anm. Für das Einzelne ergiebt sich Folgendes: Ist von vier Winkeln auf gleicher Seite der eine äußere Gegenwinkel größer (kleiner) als der innere, so ist es auch der andere; ferner betragen alsdann die beiden inneren Winkel weniger (mehr) als zwei Rechte. Auf der andern Seite der

durchschneidenden Linie findet das Umgekehrte statt. Betragen ferner zwei innere Winkel auf gleicher Seite weniger (mehr) als zwei Rechte, so sind auf dieser Seite die äußeren Gegenwinkel größer (kleiner) als die inneren.

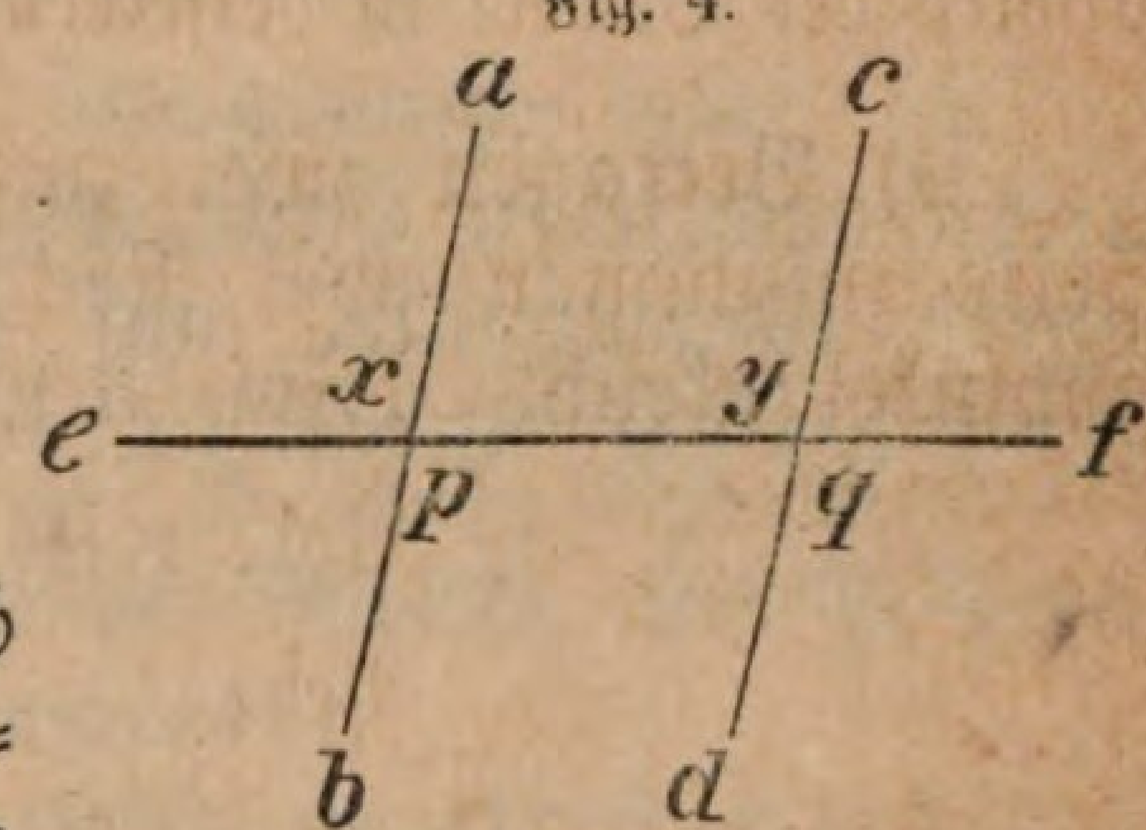
§. 14. Erklärung.

Zwei Linien, die sich nicht schneiden, auch wenn sie bis ins Unendliche verlängert gedacht werden, heißen parallel (||). Zwei Linien, die sich bei gehöriger Verlängerung schneiden würden, convergiren nach der Seite des Durchschnittspunktes und divergiren nach der entgegengesetzten.

§. 15. Lehrsätze.

1) Zwei Linien, welche mit einer dritten sie durchschneidenden Linie gleiche Gegenwinkel bilden, sind parallel.

Fig. 4.



Vor. $x = y$.

Beh. $ab \parallel cd$.

Beweis. Da $x = y$ ist,

so ist $x = q$ und $y = p$.

Der Theil der Figur, welcher oberhalb ef liegt, stimmt also in Bezug auf die Richtung der durchschnittenen Linien vollständig mit dem unterhalb ef liegenden Theile überein, wie leicht zu sehen ist, wenn man den untern Theil der Figur so neben den obern gelegt denkt, daß q links, p rechts liegt. Werden nun die durchschnittenen Linien nach oben und unten verlängert, so muß auf beiden Seiten von ef dieselbe Figur entstehen, d. h. die durchschnittenen Linien schneiden sich entweder auf keiner Seite, oder sie schneiden sich auf beiden Seiten. Letzteres ist aber nicht möglich (§. 4), und die Linien sind folglich parallel.

2) Zwei Linien, welche mit einer dritten sie durchschneidenden Linie ungleiche Gegenwinkel bilden, convergiren nach der Seite, auf welcher die äußeren Gegenwinkel größer als die inneren sind, und divergiren nach der entgegengesetzten Seite, auf welcher die äußeren Gegenwinkel kleiner als die inneren sind.

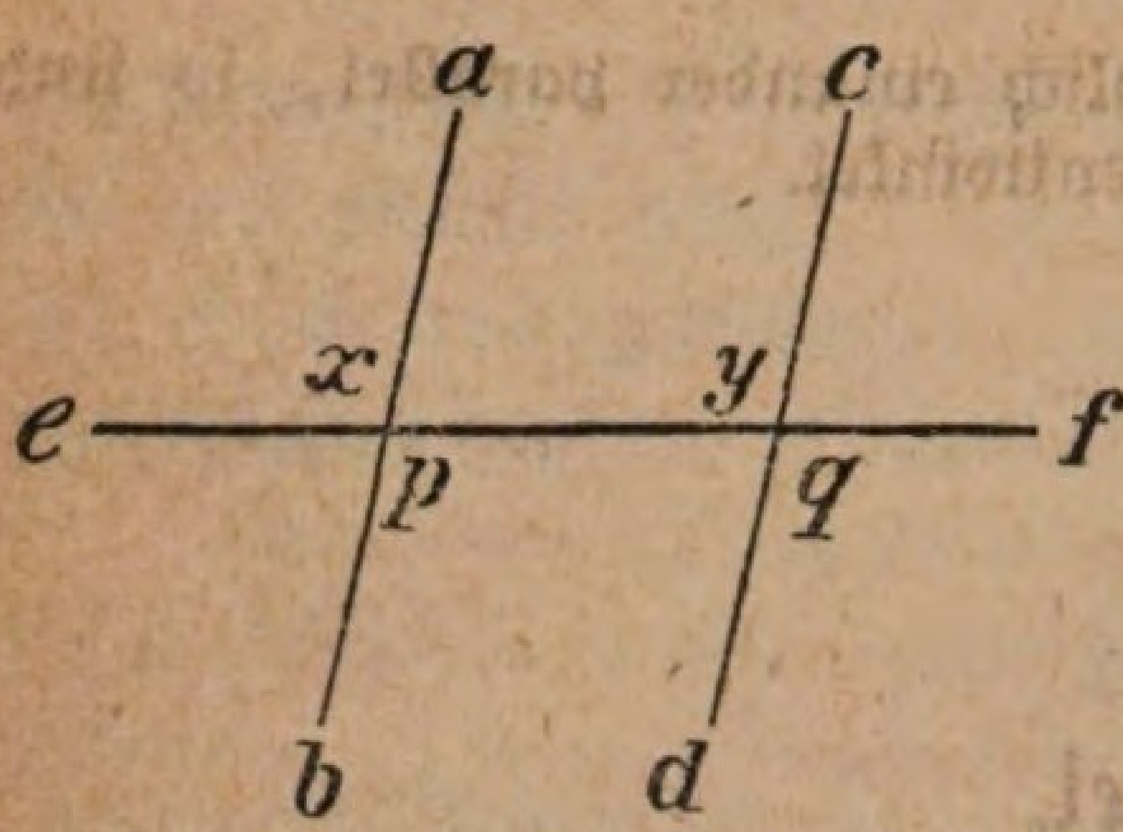
Beweis. Denkt man sich in Fig. 4, wo $x = y$, $ab \parallel cd$ ist, die Linie ab im Scheitel von x so gedrehet, daß x größer oder kleiner wird, so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus der Figur.

Anm. zu 2. Die Linien convergiren nach der Seite, auf welcher die beiden inneren Winkel zusammen weniger als 2R betragen.

§. 16. Lehrsätze.

1) Zwei parallele Linien bilden mit einer dritten sie durchschneidenden Linie gleiche Gegenwinkel.

Fig. 5.



Vor. ab || cd.

Beh. $x = y$.

Beweis. Es ist $x \gtreqless y$. Wäre nun $x \gtrless y$, so müßten die Linien ab und cd divergiren oder convergiren (§. 15, 2). Beides widerspricht der Voraussetzung, und folglich kann nicht $x \gtrless y$ sein.

2) Zwei convergente Linien bilden mit einer dritten sie durchschneidenden Linie ungleiche Gegenwinkel, und zwar ist der äußere Gegenwinkel auf der Seite des Durchschnittspunktes größer als der innere, auf der entgegengesetzten Seite aber kleiner.

Beweis. Er wird ähnlich geführt, wie der Beweis zu 1.

§. 17. Zusatz.

Aus den §§. 12, 13, 15, 16 ergiebt sich Folgendes:

1) Sollen zwei Linien so gezogen werden, daß sie parallel sind, oder daß sie mit einer durchschneidenden Linie gleiche Gegen- und Wechselwinkel bilden, oder daß unter den acht so entstandenen Winkeln je zwei innere oder äußere Winkel auf gleicher Seite zusammen 2R betragen, so sind alle diese Forderungen erfüllt, wenn eine derselben erfüllt ist. — Derselbe Zusammenhang findet statt zwischen den Forderungen, daß zwei Linien, die von einer dritten durchschnitten werden, nach der einen Seite hin convergiren (divergiren), oder daß auf dieser Seite die äußeren Gegenwinkel größer (kleiner) als die inneren, oder daß die beiden inneren Winkel zusammen kleiner (größer) als 2R sein sollen.

2) Steht von zwei parallelen durchschnittenen Linien die eine senkrecht auf der durchschneidenden Linie, so steht auch die zweite senkrecht. Steht aber von zwei convergenten durchschnittenen Linien die eine senkrecht auf der durchschneidenden Linie, so steht die andere schief.

3) Aus einem gegebenen Punkte kann man nur eine Senkrechte auf eine gegebene Linie fällen (nach 2).

Uebungssätze.

1) Schneidet eine Linie beliebig viele andere Linien unter gleichen Winkeln, so sind alle diese Linien einander parallel.

2) Stehen zwei Linien senkrecht auf einer dritten, so sind sie einander parallel.

3) Sind die Schenkel zweier Winkel beziehlich einander parallel, so sind die Winkel gleich groß, oder sie sind Supplementwinkel.

Drittes Capitel.

Von den Dreiecken.

§. 18. Erklärung.

Ein Dreieck ist eine von drei geraden Linien vollständig begränzte Ebene. Die drei Linien heißen Seiten, ihre Durchschnittspunkte Ecken. Die Seite eines Dreiecks heißt Gegenseite des Winkels, dem sie gegenüberliegt, und dieser Winkel heißt ihr Gegenwinkel.

Ein gleichseitiges Dreieck hat drei gleiche, ein gleichschenkliges zwei gleiche, ein ungleichseitiges nur ungleiche Seiten.

Ein stumpfwinkliges Dreieck hat unter seinen drei Winkeln einen stumpfen, ein rechtwinkliges einen rechten Winkel; ein spitzwinkliges Dreieck hat nur spitze Winkel. — In einem rechtwinkligen Dreiecke heißt die Gegenseite des rechten Winkels Hypotenuse; die beiden anderen Seiten heißen Catheten.

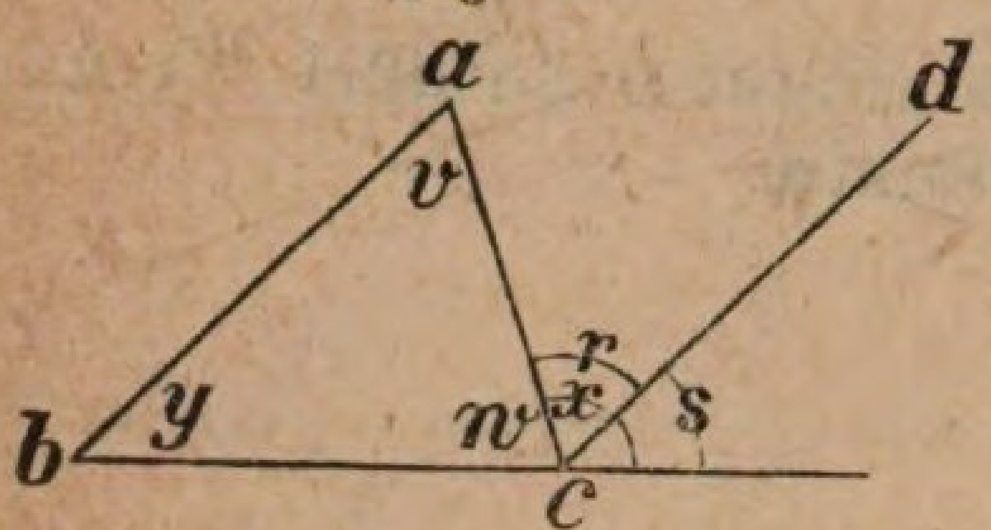
Denkt man sich aus einer Ecke eines Dreiecks eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite oder deren Verlängerung gefällt, so nennt man diese Senkrechte die Höhe, die zugehörige Seite die Grundlinie (Basis), die zugehörige Ecke die Spitze des Dreiecks. Jedes Dreieck hat daher drei Höhen, und jede Seite kann Grundlinie sein. Im gleichschenkligen Dreiecke nennt man indessen vorzugsweise die dritte, ungleiche Seite die Grundlinie, die beiden anderen Seiten die Schenkel.

Verlängert man eine Seite eines Dreiecks über einen ihrer Endpunkte hinaus, so entsteht ein äußerer Winkel. Von den drei inneren Winkeln des Dreiecks nennt man alsdann den Nebenwinkel des äußeren den anliegenden, die beiden anderen die gegenüberliegenden inneren Winkel.

§. 19. Lehrsätze.

1) Der äußere Winkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden gegenüberliegenden inneren Winkel.

Fig. 6.



Beh. $x = v + y$.

Beweis. Zieht man aus dem Scheitel des äußeren Winkels die Linie $cd \parallel ba$, so ist

$r = v$ als Wechselwinkel,

$s = y$ als Gegenwinkel,

folglich $x = r + s = v + y$.

2) Die Summe der inneren Winkel eines Dreiecks beträgt zwei Rechte. (Fig. 6).

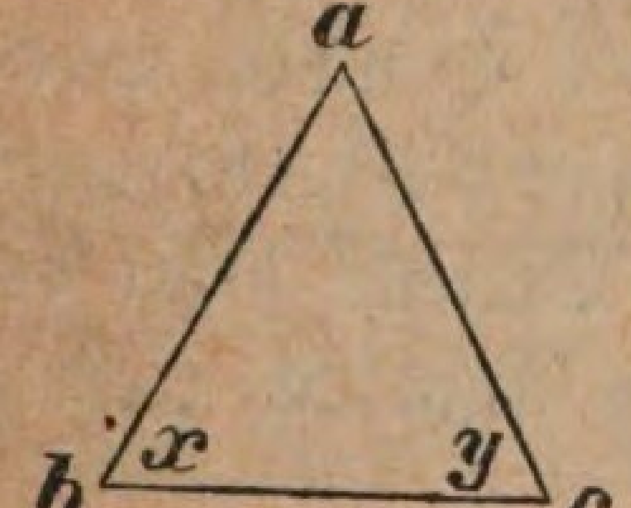
Beh. $v + y + w = 2R$.

Beweis. Es ist $v + y + w = x + w = 2R$. (Vergl. 1.)

§. 20. Lehrsatz.

In einem Dreiecke liegen gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüber.

Fig. 7.



Vor. $ab = ac$.

Beh. $y = x$.

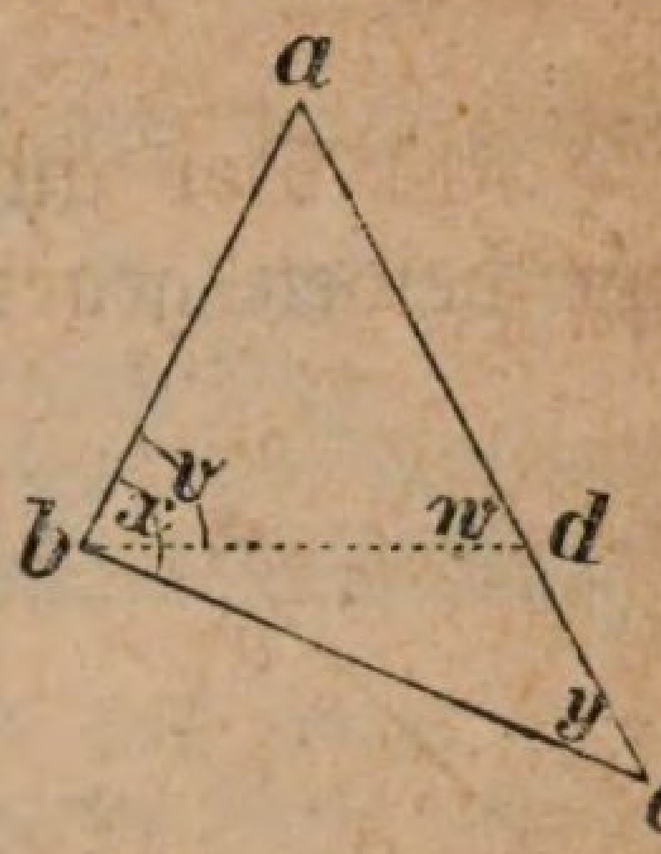
Beweis. Denkt man sich das Dreieck abc so umgedrehet, daß a an seiner Stelle bleibt, aber ab und ac ihre Lage vertauschen, so nimmt, weil $ab = ac$ ist, jeder Schenkel genau die Stelle des andern ein. Da nun bei dieser Umdrehung y an die Stelle von x tritt, das Dreieck aber seine vorige Stelle wieder einnimmt, so muß $y = x$ sein.

Anm. In einem gleichschenkligen Dreiecke ist jeder Winkel an der Basis spitz. In einem gleichseitigen Dreiecke sind die drei Winkel einander gleich, und folglich ist jeder gleich 60° (§. 19, 2).

§. 21. Lehrsatz.

In einem Dreiecke liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Fig. 8.



Vor. $ac > ab$.

Beh. $x > y$.

Beweis. Da $ac > ab$ ist, so kann man ab auf ac abtragen. Ist ad die abgetragene Linie ab, so ist $ab = ad$, folglich nach vor. §. $v = w$.

Nun ist $x > v$ und $v = w$, also auch $x > w$.

Ferner ist $w > y$, also auch $x > y$.

§. 22. Lehrsatz.

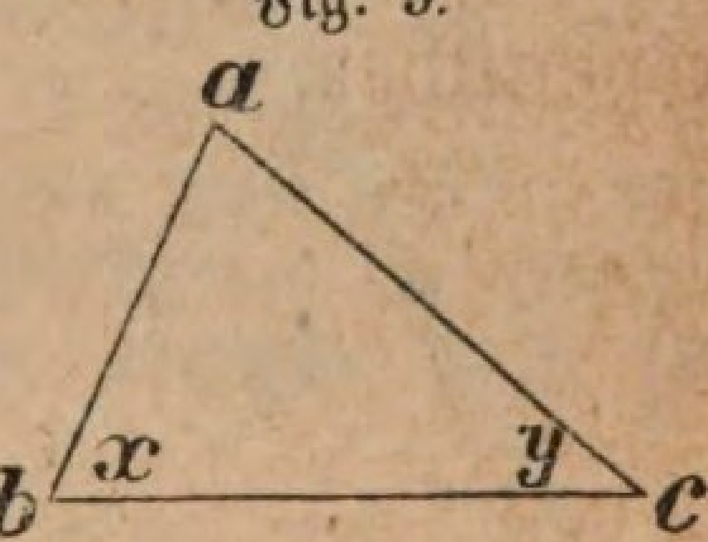
In einem Dreiecke liegen gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

Beweis. Wenn die Seiten ungleich wären, so müßten es nach vor. §. auch die Gegenwinkel derselben sein. Da dies der Voraussetzung widerspräche, so können die Seiten nicht ungleich sein.

§. 23. Lehrsatz.

In einem Dreiecke liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Fig. 9.



Vor. $x > y$.

Beh. $ac > ab$.

Beweis. Wäre $ac \leqq ab$, so müßte $x \leqq y$ sein. Beides widerspräche aber der Voraussetzung, und folglich kann nicht $ac \leqq ab$ sein.

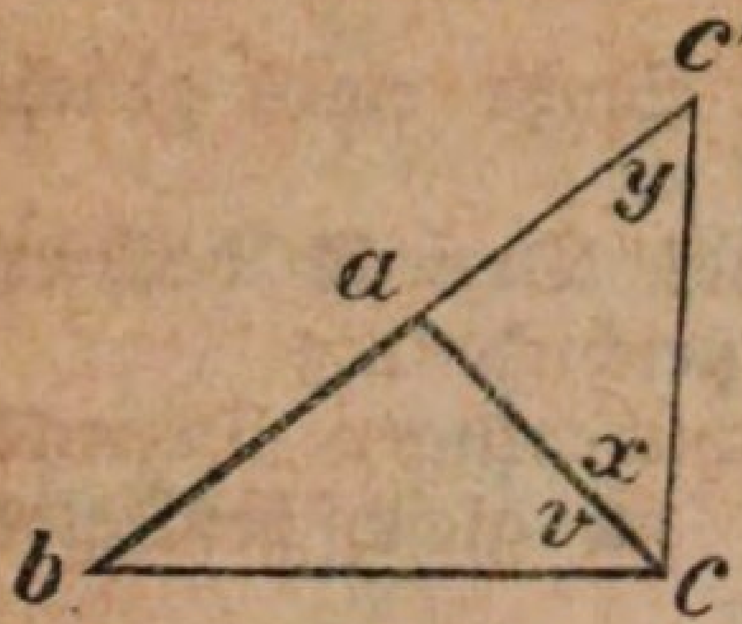
§. 24. Zusatz.

Verbindet man einen Punkt a, der außerhalb einer Linie bc liegt, mit beliebigen Punkten derselben, so ist (nach §. 23) die senkrechte Verbindungslinie die kürzeste, und umgekehrt ist die kürzeste Verbindungslinie eine Senkrechte. Man nennt dieselbe die Entfernung oder den Abstand des Punktes a von der Linie bc. Die übrigen Verbindungslinien sind um so größer, je größer der Winkel ist, den sie mit der Senkrechten bilden.

§. 25. Lehrsatz.

Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite, die Differenz aber kleiner.

Fig. 10.



Beh. 1) $ab + ac > bc$;

2) $ab - ac < bc$.

Beweis zu 1. Man denke sich die Seite ba über a hinaus um das Stück $ac' = ac$ verlängert und c' mit c verbunden. Alsdann ist

$$x = y, \text{ weil } ac' = ac \text{ ist, folglich}$$

$$x + v > y, \text{ daher } bc' > bc \text{ (nach §. 23), oder}$$

$$ab + ac > bc.$$

Ebenso wird bewiesen, daß $ab + bc > ac$, ferner, daß $ac + bc > ab$ ist.

Beweis zu 2. Es ist $bc > ab - ac$, sobald

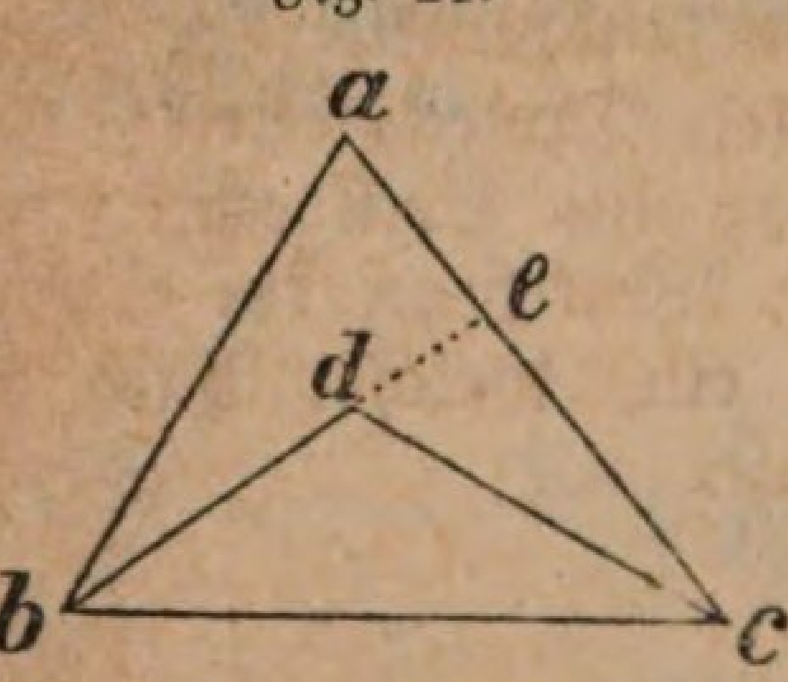
$$bc + ac > ab \text{ ist.}$$

Letzteres folgt aber aus 1.

§. 26. Lehrsatz.

Wird ein Dreieck von einem zweiten vollständig umschlossen, so hat das zweite einen größeren Umfang als das erste.

Fig. 11.



Beh. $ab + ac > db + dc$.

Beweis. Verlängert man bd bis e, so ist

$$ab + ae > bd + de,$$

$$de + ec > dc,$$

also $ab + ae + ec + de > bd + dc + de$,

oder $ab + ac > db + dc$.

Anm. Wenn das umschlossene Dreieck eine andere Lage hat, so wird der Beweis in ähnlicher Art geführt.

Uebungssätze.

1) Ist in einem Dreiecke der eine Winkel stumpf oder ein Rechter, so sind die beiden anderen Winkel spitz.

2) In einem gleichschenkligen Dreiecke ist der Winkel an der Spitze doppelt so groß als das Complement eines Winkels an der Grundlinie.

3) Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist größer als jede der beiden Catheten.

4) Errichtet man auf zwei sich schneidenden Linien Senkrechte, so müssen sich diese bei gehöriger Verlängerung ebenfalls schneiden.

5) Sind in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so sind sie spitz.

6) Die Summe der drei Höhen eines Dreiecks ist kleiner als die der drei Seiten.

7) Die Halbirungslinie eines Außenwinkels an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist der Grundlinie parallel.

8) Ist die Gerade, welche einen Außenwinkel eines Dreiecks halbirt, parallel mit einer der Dreiecksseiten, so ist das Dreieck gleichschenklig.

9) Die Linien, welche durch die Ecken eines gleichschenkligen Dreiecks parallel mit den Seiten gezogen sind, bilden wiederum ein gleichschenkliges Dreieck.

10) Denkt man sich in einem gleichschenkligen Dreiecke aus einem Endpunkte der Grundlinie eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite gefällt, so bildet diese Senkrechte mit der Grundlinie einen Winkel, der halb so groß ist als der Winkel an der Spitze.

11) Die Halbirungslinie des Winkels zwischen dieser Senkrechten und dem einen Schenkel des Dreiecks bildet mit der Grundlinie einen Winkel von 45°.

12) Denkt man sich aus dem Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks eine Senkrechte auf die Hypotenuse gefällt und den Winkel zwischen dieser Senkrechten und der einen Cathete halbirt, so schneidet die Halbirungslinie ein gleichschenkliges Dreieck ab.

13) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke der eine spitze Winkel doppelt so groß ist als der andere, so ist die Hypotenuse doppelt so groß als die Cathete, welche dem kleineren spitzen Winkel gegenüberliegt.

14) Wenn man zwei Seiten eines Dreiecks über die gemeinschaftliche Ecke hinaus jede um die Größe der andern verlängert und die Endpunkte dieser Verlängerungen mit den Endpunkten der dritten Dreiecksseite verbindet, so sind diese beiden Verbindungslinien parallel.

15) In welchem Falle ist die Gerade, welche die Endpunkte der Verlängerungen unter sich verbindet, parallel mit der dritten Dreiecksseite?

16) Denkt man sich aus der Spitze eines Dreiecks eine Senkrechte auf die Grundlinie gefällt und durch eine andere Linie den Winkel an der Spitze halbirt, so schließen diese beiden Linien einen Winkel ein, welcher halb so groß ist als die Differenz der Winkel an der Grundlinie.

Viertes Capitel.

Von der Congruenz der Dreiecke, vom gleichschenkligen Dreiecke und vom geometrischen Orte.

§. 27. Erklärung.

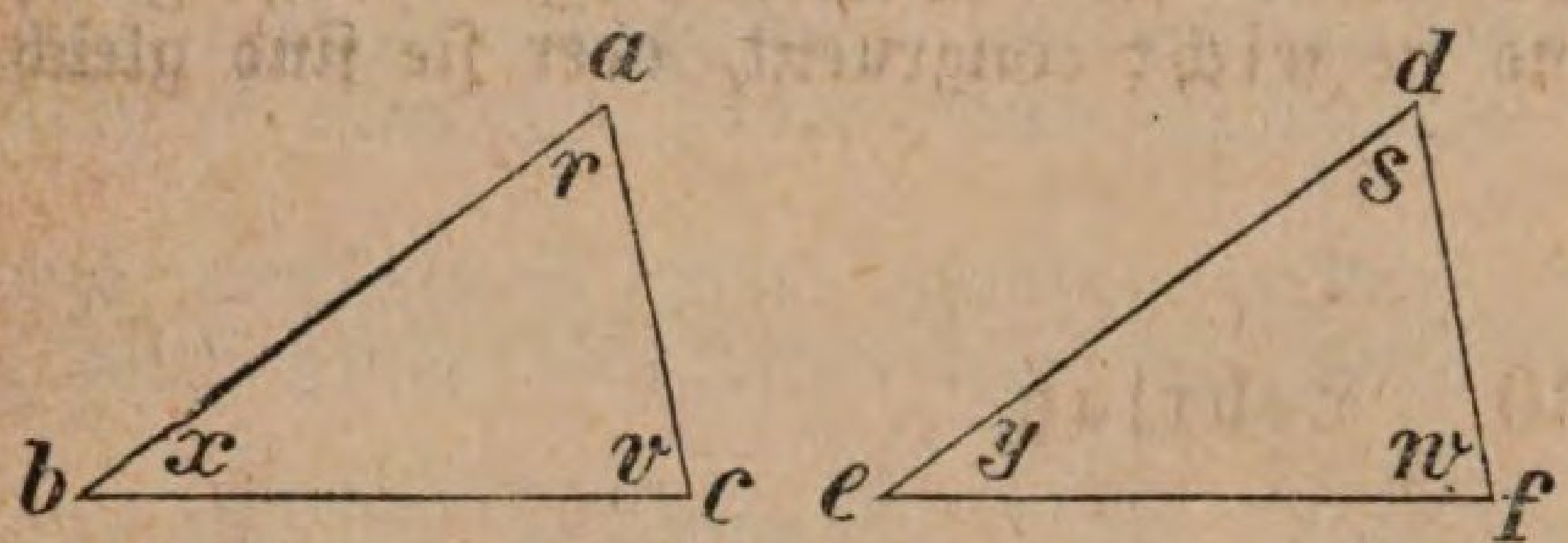
Zwei Dreiecke (überhaupt zwei Figuren) heißen congruent (≅), wenn sie sich bei gehöriger Lage vollständig decken. In zwei congruenten

Dreiecken sind also alle Seiten und alle Winkel **beziehlich** gleich groß, und zwar liegen gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber, und umgekehrt.

§. 28. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Fig. 12.



Vor. ab = de,
bc = ef,
x = y.
Beh. △ abc ≅ △ def *).

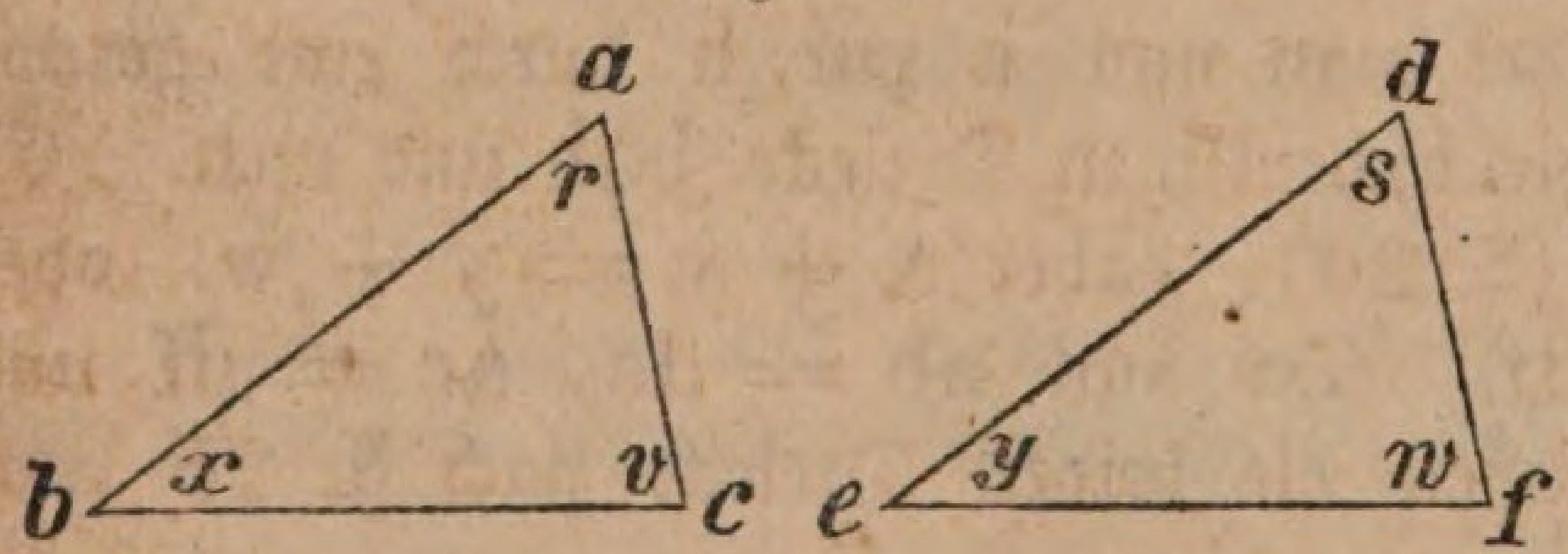
Beweis. Man denke sich △ def so auf △ abc gelegt, daß die gleich großen Seiten ef und bc sich vollständig decken und dabei e auf b, f auf c fällt. Alsdann muß auch ed der Richtung nach auf ba fallen, weil y = x, ferner der Punkt d auf den Punkt a, weil de = ab ist. Da nun alle drei Ecken auf einander fallen, so sind die Dreiecke congruent.

Es ist also auch ac = df, r = s und v = w (§. 27).

§. 29. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in einer Seite und zwei gleichliegenden **) Winkeln übereinstimmen.

Fig. 13.



Vor. bc = ef,
x = y,
v = w.
Beh. △ abc ≅ △ def.

Beweis. Man denke sich △ def so auf △ abc gelegt, daß e auf b, f auf c fällt. Alsdann muß auch ed der Richtung nach auf ba, fd der Richtung nach auf ca fallen, weil y = x, w = v ist. Da sich nun ed

---

*) Bei der Angabe der Congruenz ordnet man die vorkommenden Buchstaben in der Art, daß die Scheitelbuchstaben gleicher Winkel eine gleiche Stellung erhalten.

**) Ein Winkel des einen Dreiecks hat dieselbe Lage wie ein Winkel des andern, wenn jeder in dem betreffenden Dreiecke an der gegebenen Seite liegt, oder jeder ihr gegenüber.

und fd in demselben Punkte schneiden müssen, in welchem sich ba und ca schneiden, so muß auch d auf a fallen, und die Dreiecke sind daher congruent. Schließlich ist also auch ab = de, ac = df, r = s.

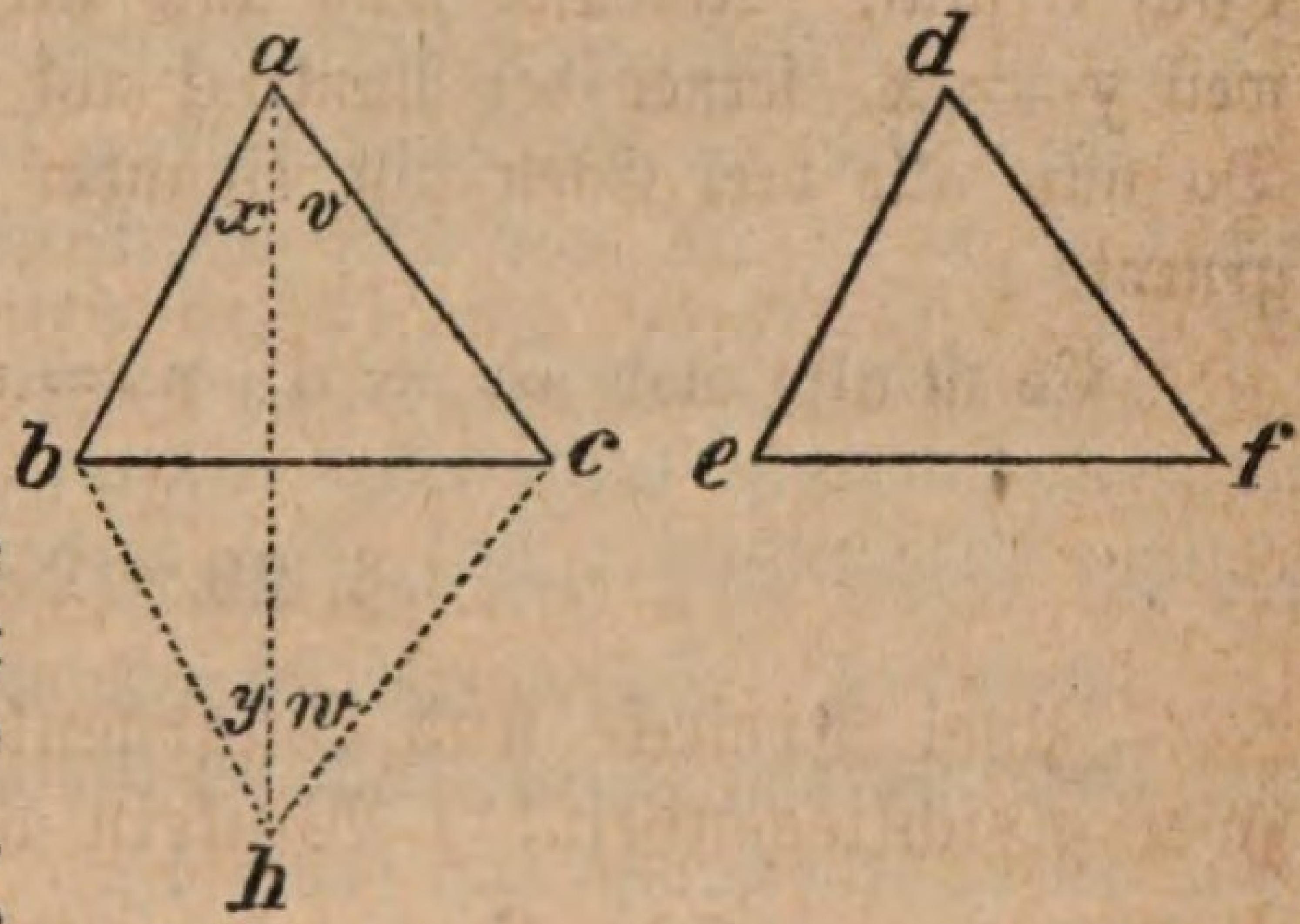
Anm. 1. Wenn zwei Dreiecke in zwei Winkeln übereinstimmen, so stimmen sie auch im dritten überein. Für die Voraussetzung des eben bewiesenen Lehrsatzes konnten daher die zwei gleichliegenden Winkel beliebig gewählt werden.

Anm. 2. Stimmen zwei Dreiecke in einer Seite und zwei nicht gleichliegenden Winkeln überein, so sind sie **nicht** congruent, oder sie sind gleichschenklig.

§. 30. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

Fig. 14.



Vor. ab = de,
ac = df,
bc = ef.

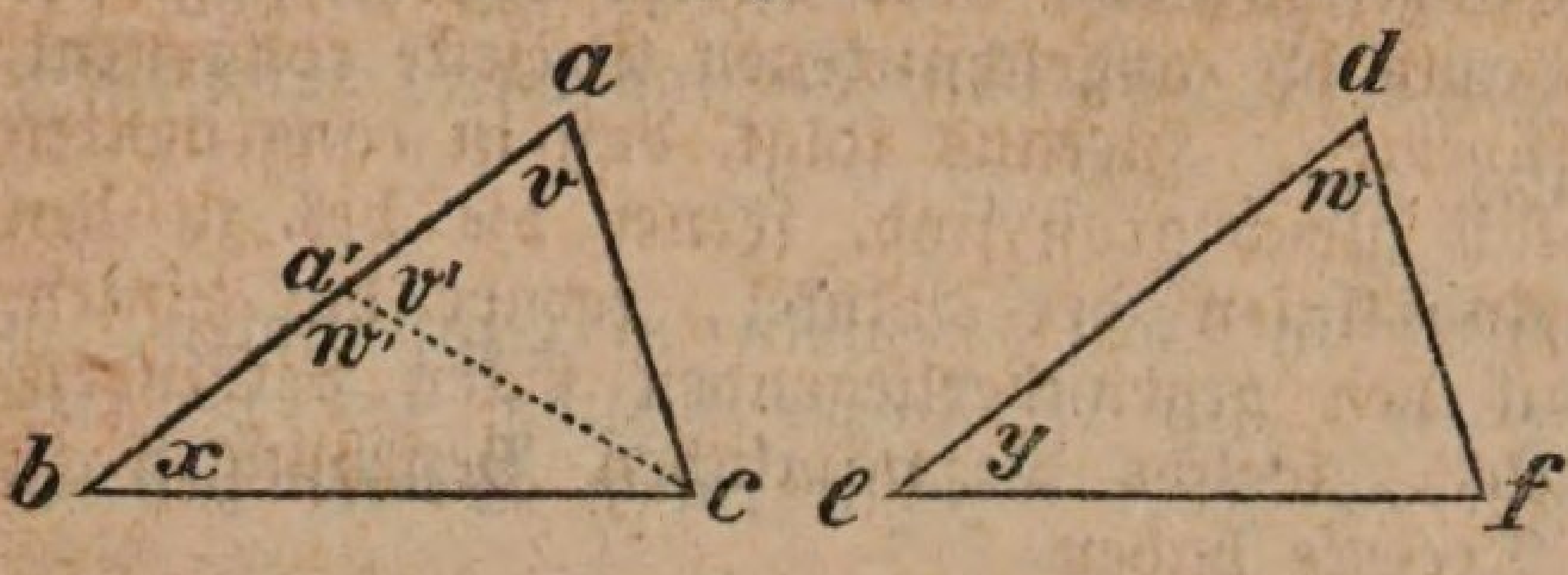
Beh. $\triangle$ abc $\cong$ $\triangle$ def.

Beweis. Man denke sich die beiden Dreiecke abc und def mit den größten Seiten bc und ef so an einander gelegt, daß e an b, f an c fällt. Alsdann erhält d die Lage des Punktes h. Verbindet man nun a und h durch eine gerade Linie, so entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke bah und cah. Es ist alsdann x = y, v = w (§. 20), daher x + v = y + w, oder $\sphericalangle$ bac = $\sphericalangle$ bhc = $\sphericalangle$ edf. Da nun ab = de, ac = df und $\sphericalangle$ bac = $\sphericalangle$ edf ist, so müssen die beiden Dreiecke nach §. 28 congruent sein.

§. 31. Lehrsätze.

1) Zwei Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der einen übereinstimmen, brauchen nicht congruent zu sein. Sind sie es nicht, so ist der Gegenwinkel der zweiten Seite in dem einen Dreiecke spitz, im andern stumpf, und beide Winkel ergänzen sich zu 2R.

Fig. 15.



Vor. $ac = df$,
$bc = ef$,
$x = y$.

Beh. Es ist $\triangle abc \cong \triangle def$,
oder es ist $v + w = 2R$.

Beweis. Man denke sich $\triangle$ def so auf $\triangle$ abc gelegt, daß e auf b, f auf c fällt. Alsdann muß ed der Richtung nach auf ba fallen, weil $y = x$ ist. Die Lage des Punktes d kann aber eine dreifache sein: entweder fällt d auf a, oder zwischen b und a, oder in die Verlängerung von ba.

Fällt d auf a, so ist $\triangle abc \cong def$.

Fällt d auf einen beliebigen Punkt a' zwischen b und a, so ist $w' = w$, $a'c = df$, also auch $a'c = ac$, $v = v'$. Nun ist $v' + w' = 2R$, und folglich muß auch $v + w' = v + w = 2R$ sein. Hierbei ist v als Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks spitz, daher ist w stumpf.

Fällt d in die Verlängerung von ba, so ergiebt sich in ähnlicher Weise, daß $v + w = 2R$, daß aber umgekehrt w spitz, v stumpf ist.

2) Zwei Dreiecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, und wenn ferner das eine Paar gleicher Seiten gleiche Gegenwinkel hat, das andere Paar aber gleichartige *).

Beweis. Wären die Dreiecke nicht congruent, so müßte von den zwei Gegenwinkeln, welche nach der Voraussetzung gleichartig sind, der eine spitz, der andere stumpf sein (nach 1).

Anm. Die Bedingung, daß zwei Gegenwinkel gleichartig sein müssen, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden, wenn die zwei gleichen Winkel entweder rechte oder stumpfe Winkel sind, überhaupt, wenn sie der größern Dreiecksseite gegenüberliegen, weil alsdann die übrigen Winkel nothwendig spitz sind.

§. 32. Zusatz.

Aus den vorigen §§. folgt, daß zwei Dreiecke im Allgemeinen congruent sind, wenn sie in drei Stücken übereinstimmen, unter denen aber mindestens eine Linie vorkommen muß. Durch drei Stücke dieser Art ist also ein Dreieck vollständig bestimmt.

Anm. Zieht man in congruenten Dreiecken aus den Scheiteln beziehlich gleicher Winkel je eine Linie nach der Gegenseite, so daß von letzterer

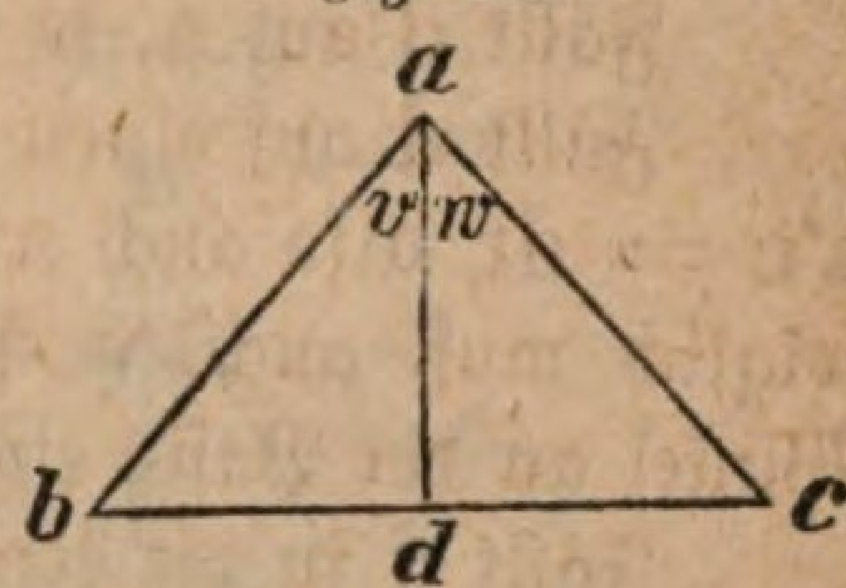
*) Zwei Winkel sind gleichartig, wenn jeder derselben ein rechter, oder jeder ein spitzer, oder jeder ein stumpfer Winkel ist.

entweder beziehlich gleiche Stücke abgeschnitten, oder an ihr beziehlich gleiche Winkel gebildet werden, so sind auch die abgeschnittenen Dreiecke congruent, weil sie in drei Stücken übereinstimmen. Hieraus folgt, daß in congruenten Dreiecken auch die Höhen beziehlich gleich groß sind, ferner die bis zu den Gegenseiten verlängerten Halbirungslinien der Winkel, ferner die Linien, welche die Mitten der Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, überhaupt alle Linien (und Winkel), welche die nämlichen Beziehungen zu den übrigen Stücken der beiden Dreiecke haben.

§. 33. Lehrsatz.

Ein gleichschenkliges Dreieck läßt sich in zwei congruente Dreiecke zerlegt denken.

Fig. 16.



Beweis. Denkt man sich in dem gleichschenkligen Dreiecke abc den Winkel an der Spitze (a) durch die Linie ad halbirt, so ist $v = w$, $ab = ac$, $ad = ad$, folglich $\triangle abd \cong \triangle acd$.

Aus der Congruenz der beiden Dreiecke ergiebt sich, daß $bd = cd$, $\sphericalangle bda = \sphericalangle cda = R$ ist, daß also die Linie ad, welche den Winkel an der Spitze halbirt, zugleich die Grundlinie halbirt und auf derselben senkrecht steht. Da es nun neben der Linie ad in dem gleichschenkligen Dreiecke abc nicht noch eine zweite aus a gezogene Linie geben kann, welche den Winkel bac, oder die Grundlinie, oder das Dreieck halbirte, oder welche auf der Grundlinie in deren Mitte senkrecht stände, so folgt:

1) daß jede dieser vier Forderungen erfüllt ist, wenn nur eine derselben es ist,

2) daß eine Linie, die auf der Grundlinie in deren Mitte senkrecht steht, bei gehöriger Verlängerung durch die Spitze a gehen muß.

§. 34. Lehrsätze.

Haben zwei gleichschenklige Dreiecke denselben Schenkel, so gehört beziehlich in beiden Dreiecken

1) zu derselben Grundlinie*) dieselbe Höhe,

2) zur größeren Grundlinie die kleinere Höhe,

3) zur größeren Grundlinie der größere Gegenwinkel,

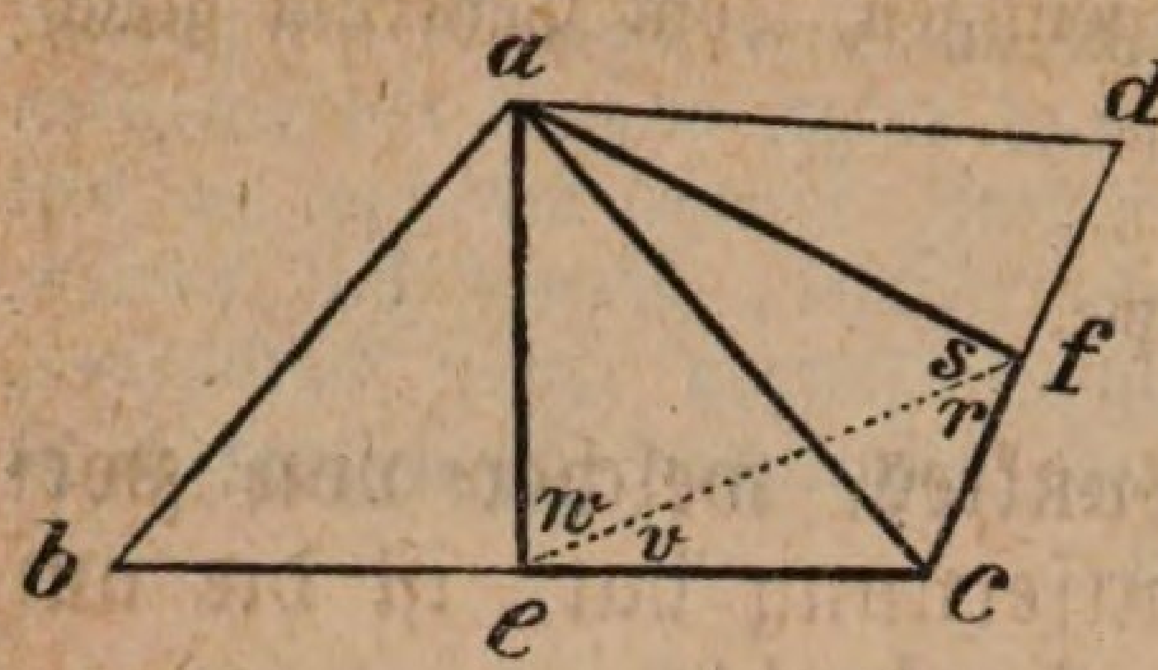
und ferner findet auch stets das Umgekehrte statt.

Beweise zu 1 und 2. Man denke sich die beiden Dreiecke so an einander gelegt, daß die beiden Spitzen und zwei gleiche Schenkel zusammen-

---

*) Unter der Grundlinie ist die dritte Seite zu verstehen.

Fig. 17.

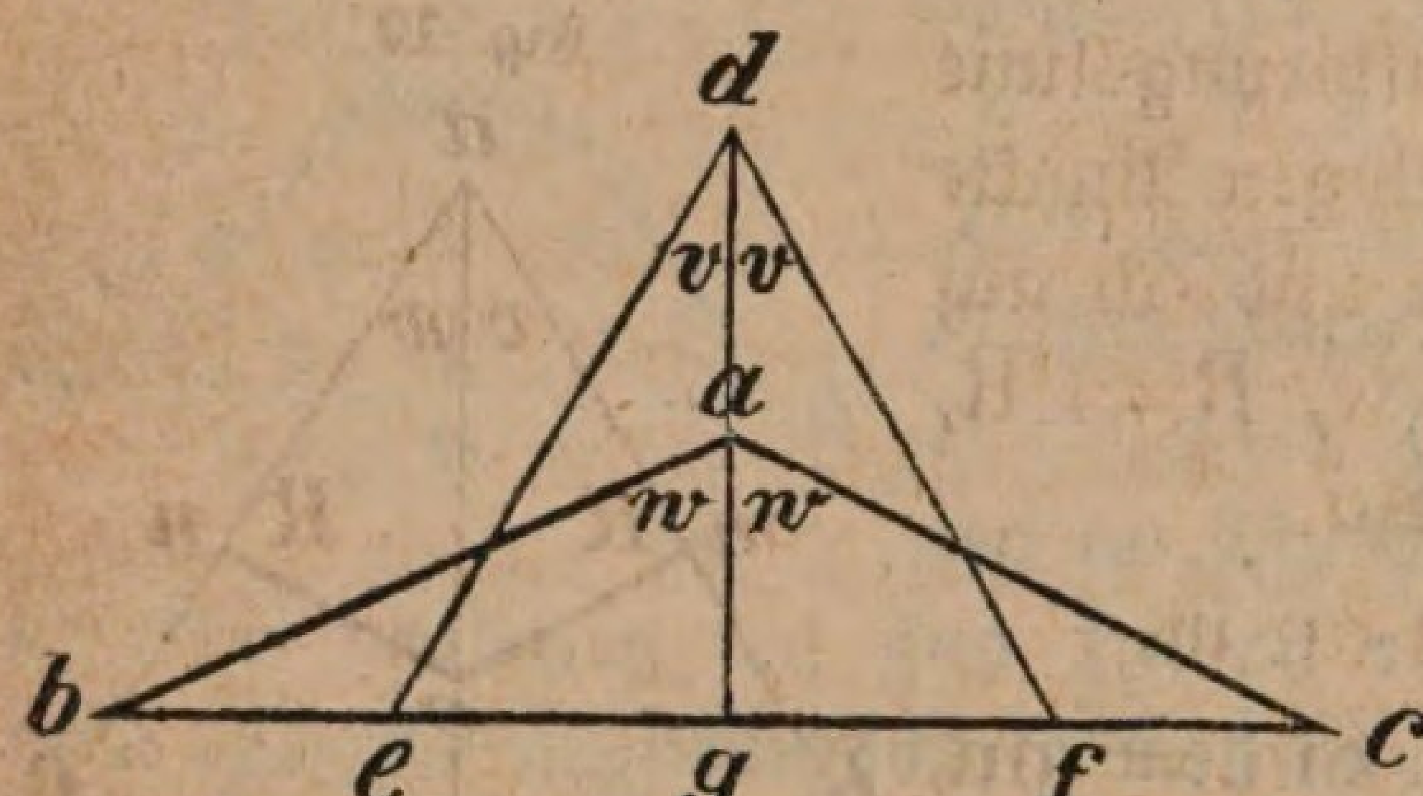


fallen. Sind in Fig. 17 abc und acd die beiden an einander gelegten Dreiecke, ae und af ihre Höhen, ce und cf die halben Grundlinien, so ziehe man die Linie ef. Alsdann ist stets $v + w = r + s = R$.

Sobald nun $cb = cd$, oder $ce = cf$, also $r = v$ ist, so ist auch $s = w$, daher $ae = af$. Zu derselben Grundlinie gehört also dieselbe Höhe, und ebenso findet das Umgekehrte statt.

Sobald hingegen $cb > cd$, oder $ce > cf$, also $r > v$ ist, so ist $s < w$, daher $ae < af$. Zur größeren Grundlinie gehört also die kleinere Höhe, und ebenso findet das Umgekehrte statt.

Fig. 18.



Beweis zu 3. Hat von den beiden Dreiecken abc und def das erstere die größere Grundlinie, so hat das andere (nach 2) die größere Höhe. Denkt man sich nun $\triangle$ def so auf $\triangle$ abc gelegt, daß die Grundlinien und zugehörigen Höhen der Richtung nach auf einander fallen, so erhält $\triangle$ def die in Fig. 18 angegebene Lage. Alsdann ist $w > v$, oder $2w > 2v$, und die größere Grundlinie hat also den größeren Gegenwinkel. — Der Beweis für die Umkehrung wird indirekt geführt.

Anm. Aus den eben bewiesenen Sätzen ergiebt sich noch Folgendes: Denkt man sich ein rechtwinkliges Dreieck in der Art verändert, daß bei unveränderter Hypotenuse die eine Cathete zunimmt, so nimmt auch ihr Gegenwinkel zu, während zugleich die andere Cathete und ihr Gegenwinkel abnehmen. In zwei rechtwinkligen Dreiecken von gleicher Hypotenuse liegt daher jeder größeren Cathete der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt dem größeren Winkel die größere Cathete.

§. 35. Erklärung.

Der geometrische Ort eines Punktes ist eine Linie (oder eine Fläche), deren sämmtliche Punkte einer Forderung genügen, die für jenen Punkt gestellt war, während zugleich kein Punkt außerhalb dieser Linie die Forderung erfüllt.

Haben zwei geometrische Oerter einen Punkt gemeinschaftlich, so genügt dieser den beiden Forderungen, welche einzeln an die beiden geometrischen Oerter geknüpft waren.

Anm. Das einfachste Beispiel eines geometrischen Ortes ist die Kreislinie, deren Punkte sämmtlich der Forderung genügen, vom Centrum gleichweit entfernt zu sein.

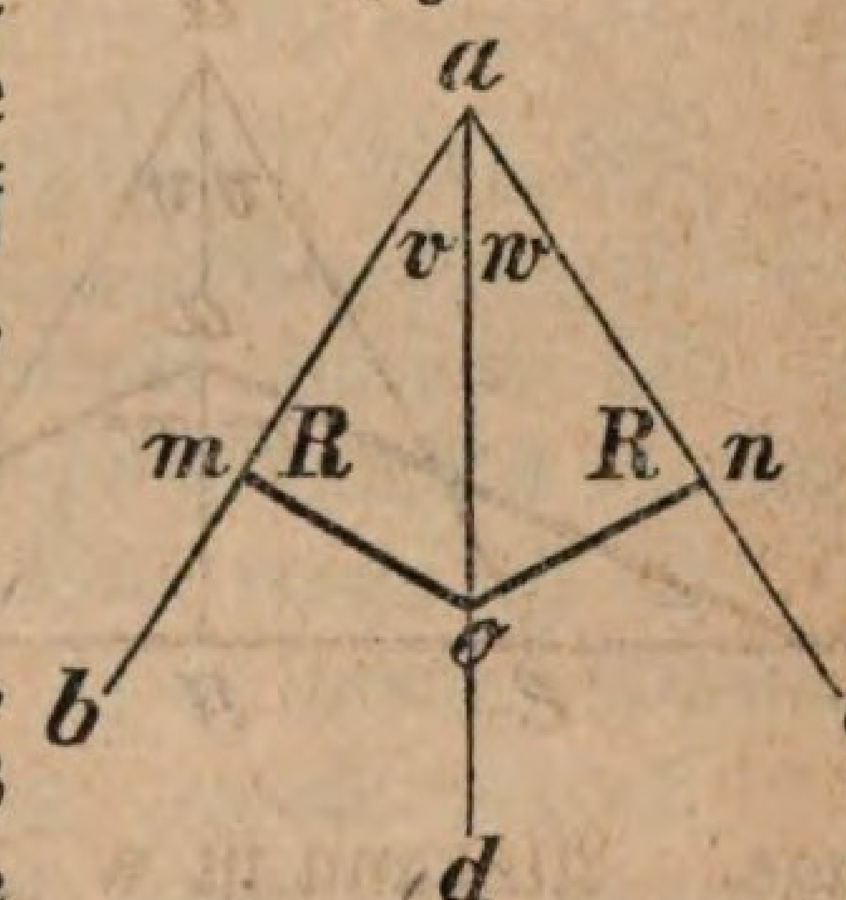
§. 36. Lehrsätze.

1) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von zwei gegebenen Punkten b und c gleiche Entfernung hat, ist die auf der Linie bc in deren Mitte errichtete Senkrechte.

Beweis. Er ergiebt sich aus §. 33 (Folgerung 2).

2) Der geometrische Ort eines Punktes, welcher von den Schenkeln eines gegebenen Winkels gleiche Entfernung hat, ist die Halbirungslinie dieses Winkels.

Fig. 19.



Beweis. Es sei ad die Halbirungslinie des Winkels bac, und aus einem beliebigen Punkte o dieser Linie seien die Senkrechten om und on auf ab und ac gefällt. Alsdann ist v = w, R = R, ao = ao, folglich $\triangle$ amo $\cong$ $\triangle$ ano.

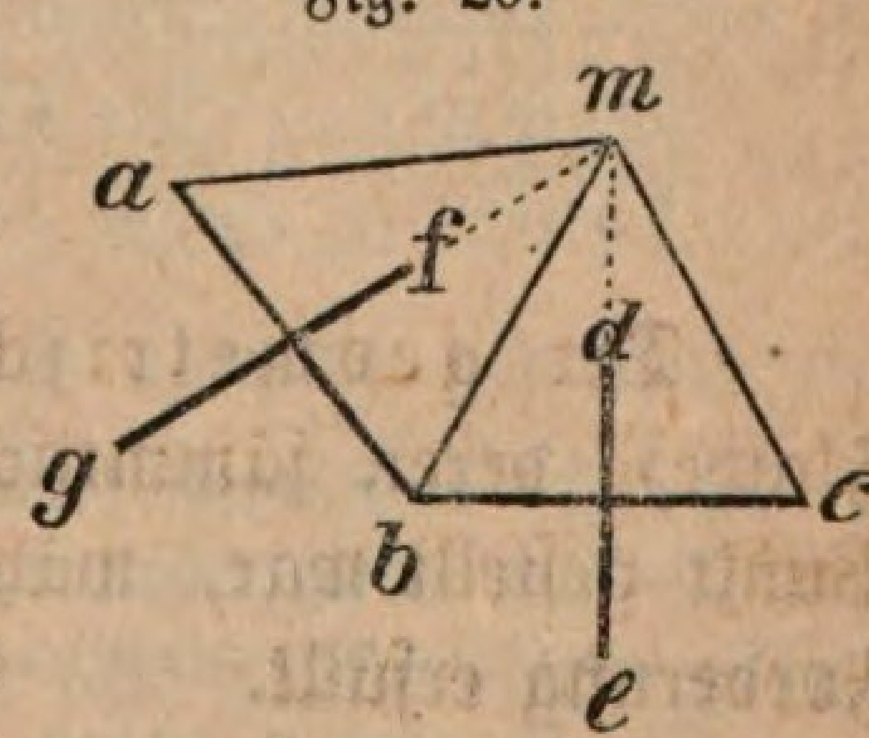
Hieraus ergiebt sich, daß om = on ist.

Wenn man umgekehrt weiß, daß om = on, R = R ist, so muß auch v = w sein, d. h. es kann keinen Punkt geben, der von ab und ac gleichweit entfernt wäre und außerhalb der Halbirungslinie ad läge.

Anm. Eine gerade Linie ist durch zwei ihrer Punkte der Richtung nach bestimmt. Kennt man also zwei Punkte, die von den in 1) erwähnten Punkten b und c gleichweit entfernt sind, so ist ihre Verbindungslinie der erwähnte geometrische Ort und steht auf bc in der Mitte senkrecht. Aehnliches gilt von der in 2) erwähnten Linie ad.

§. 37. Zusatz.

Fig. 20.

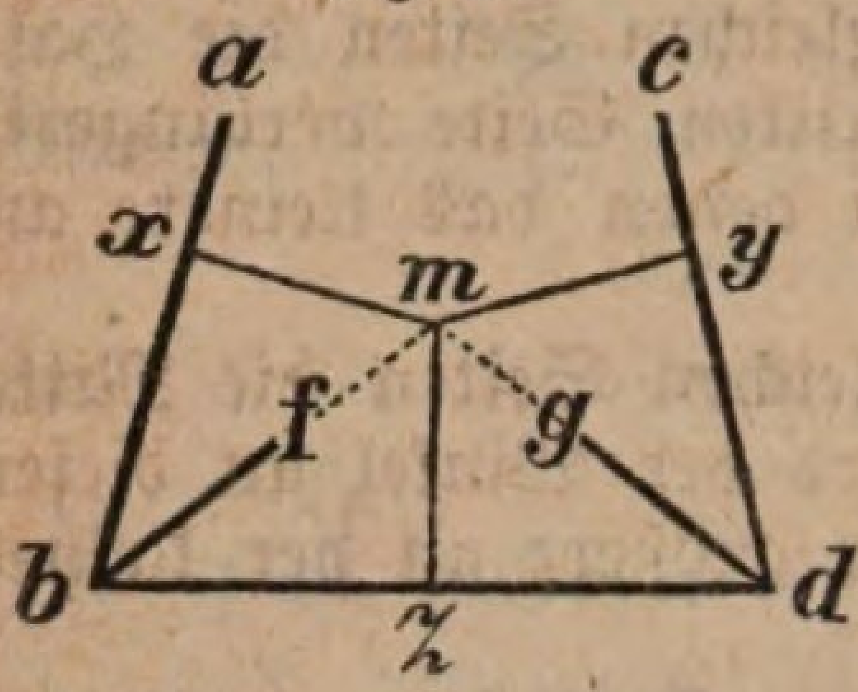


1) Sind a, b, c (Fig. 20) drei beliebige Punkte, so giebt es einen durch die Linie fg angedeuteten geometrischen Ort für einen Punkt, der gleichweit von a und b, ebenso einen zweiten durch die Linie de angedeuteten geometrischen Ort für einen Punkt, der gleichweit von b und c absteht. Haben nun die beiden Linien de und fg bei gehöriger Verlängerung einen Durchschnittspunkt, so ist dieser von a, b und c gleichweit entfernt. Es schneiden sich aber die Linien de und fg (und zwar einmal), wenn abc eine gebrochene Linie ist, hingegen

sind sie parallel, wenn a, b, c in gerader Linie liegen. In letzterem Falle giebt es also keinen Punkt, der von a, b, c gleichweit abstände, in ersterem Falle einen einzigen (m).

2) Werden zwei gerade Linien ab und cd (Fig. 21) von einer dritten in den Punkten b und d geschnitten, so giebt es einen durch die Linie bf angedeuteten geometrischen Ort für einen Punkt, der gleichweit von ab und bd, ebenso einen solchen (dg) für einen Punkt, der von cd und bd gleichweit absteht. Da sich nun die Linien bf und dg bei gehöriger Verlängerung schneiden müssen, so giebt es einen Punkt (m), der von ab, cd, bd gleichweit absteht. Die Senkrechten mx, my, mz sind also einander gleich.

Fig. 21.



§. 38. Zusatz.

Die Folgerungen des vorigen §. lassen sich in nachstehender Form als Lehrsätze aussprechen:

1) Zu jedem Dreiecke giebt es einen Punkt, der von allen drei Ecken gleichweit entfernt ist (§. 37, 1).

2) In jedem Dreiecke giebt es einen Punkt, der von allen drei Seiten gleichweit entfernt ist (§. 37, 2).

3) Die Linien, welche auf den drei Seiten eines Dreiecks in deren Mitten senkrecht stehen, schneiden sich in einem Punkte (§. 37, 1).

4) Die Halbirungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (§. 37, 2).

5) Eine Gerade und eine Kreislinie können höchstens zwei Punkte gemeinschaftlich haben (§. 37, 1).

6) Haben zwei Kreislinien mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich, so liegen sie ganz auf einander (§. 37, 1).

An die Sätze 5 und 6 läßt sich ferner anknüpfen:

7) Eine Kreislinie wird von einer anderen, oder von einer Geraden stets in zwei Punkten geschnitten.

Beweis. Die schneidende Linie tritt in einem Punkte in die Kreisebene hinein, in einem zweiten wieder heraus.

Uebungssätze.

1) In congruenten Dreiecken gehören zu gleichen Seiten auch gleiche Höhen.

2) In congruenten Dreiecken sind die bis zur Gegenseite verlängerten Halbirungslinien gleicher Winkel gleich groß.

3) In congruenten Dreiecken sind die Linien, welche die Mitten gleicher Seiten mit den Gegenecken verbinden, gleich groß.

4) Im gleichseitigen Dreiecke sind drei gleiche, im gleichschenkligen zwei gleiche, im ungleichseitigen nur ungleiche Höhen.

5) Zwei gleichseitige Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Höhe übereinstimmen.

6) Zwei gleichschenklige Dreiecke sind congruent, wenn sie in der Grundlinie und der zugehörigen Höhe übereinstimmen; sie sind aber nicht nothwendig congruent, wenn sie in einem Schenkel und der zugehörigen Höhe übereinstimmen.

7) Wenn man in einem Dreiecke mit zwei ungleichen Seiten die Halbirungslinie des eingeschlossenen Winkels bis zur dritten Seite verlängert, so wird letztere in zwei ungleiche Stücke getheilt, von denen das kleinere an der kleineren jener zwei Seiten liegt.

8) Wenn man in einem Dreiecke mit zwei ungleichen Seiten die Mitte der dritten Seite mit der Gegenecke verbindet, so wird der Winkel an dieser Ecke in zwei ungleiche Theile zerlegt, von welchen der größere an der kleineren jener zwei Seiten liegt.

9) Wenn man die drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks um gleiche Stücke verlängert, oder verkürzt, und die drei so erhaltenen Punkte unter einander verbindet, so erhält man wieder ein gleichseitiges Dreieck.

10) Wenn in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich sind, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so hat der größere Winkel die größere Gegenseite.

11) Wenn in zwei Dreiecken je zwei Seiten gleich sind, die dritten Seiten aber ungleich, so hat die größere Seite den größeren Gegenwinkel.

12) Die drei Linien, welche zwei Außenwinkel eines Dreiecks und den an der dritten Ecke liegenden inneren Winkel halbiren, schneiden sich in einem Punkte, der von den drei Seiten gleichweit entfernt ist.

Fünftes Capitel.

Von den geometrischen Aufgaben.

§. 39. Erklärung.

Eine geometrische Aufgabe stellt die Forderung, gegebene räumliche Größen so mit einander zu verbinden, daß dadurch einer bestimmten Bedingung genügt werde. Die Aufgabe ist gelöst, wenn man entweder die verlangte Verbindung wirklich durch eine Zeichnung (Construction) herstellt, oder wenn man den Weg angiebt, auf dem sich die Construction ausführen läßt.

Eine Lösung heißt geometrisch, wenn durch dieselbe die Aufgabe auf eine bereits bekannte zurückgeführt wird, schließlich also auf die in §§. 1 und 3 angegebenen Constructionen, welche mit Lineal und Zirkel ausgeführt werden; sie heißt mechanisch, wenn außer Lineal und Zirkel noch andere Instrumente, z. B. Transporteur, Winkelhaken u. a. benutzt werden müssen.

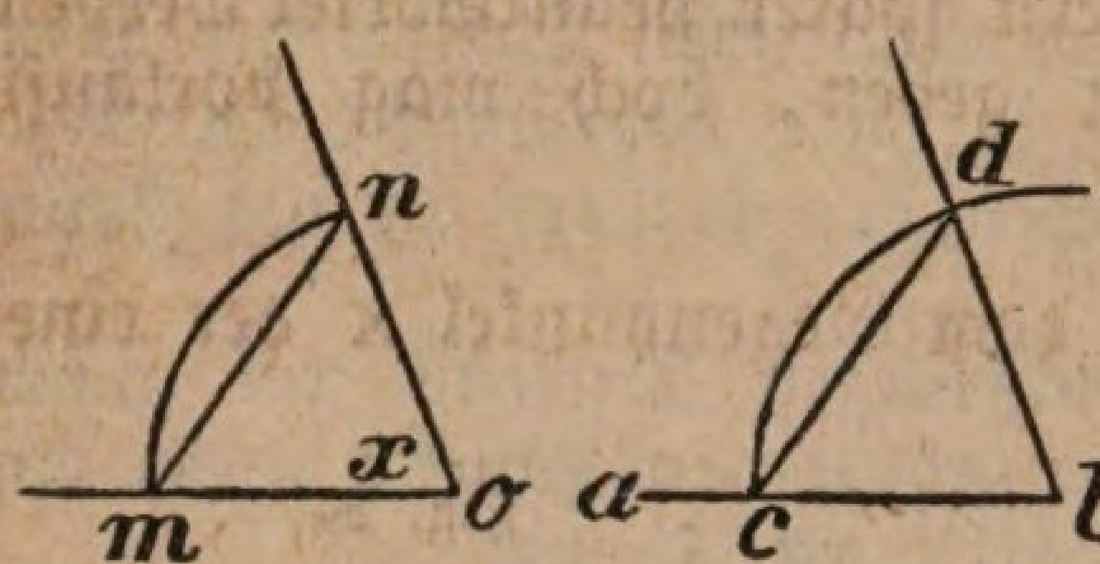
Die Determination einer Aufgabe giebt an, welche Bedingungen die gegebenen Größen erfüllen müssen, damit die Lösung der Aufgabe über-

haupt möglich sei. So ist z. B. die Determination der Aufgabe, aus drei Linien (als Seiten) ein Dreieck zu construiren, in §. 25 angedeutet.

§. 40. Aufgaben.

I. An einer Linie ab im Punkte b einen gegebenen Winkel x abzutragen.

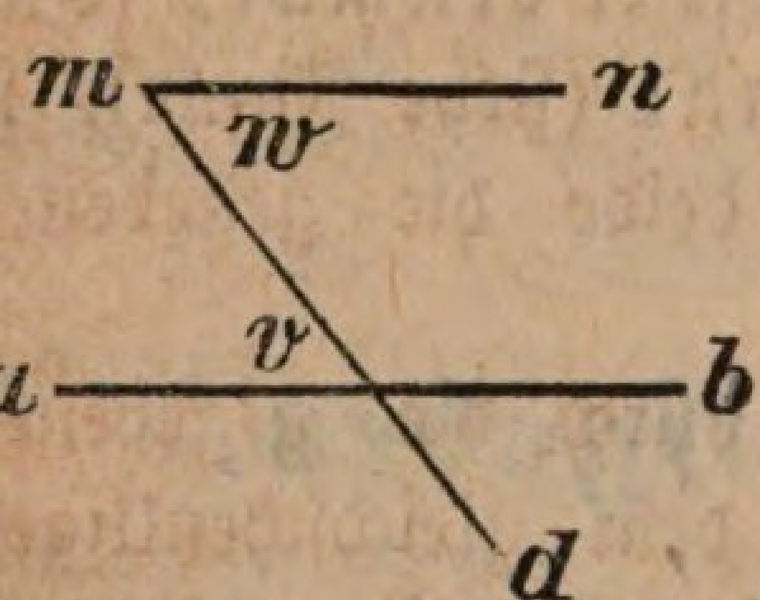
Fig. 22.



Auflösung. Aus dem Scheitel o des gegebenen Winkels x trage man auf den beiden Schenkeln die gleichen Stücke om und on ab und denke sich m und n durch eine gerade Linie verbunden. Alsdann trage man auf ba die Linie bc = om ab, beschreibe aus b als Centrum mit bc einen Kreis und trage in diesem die Linie cd = mn ab. Verbindet man nun d und b durch eine gerade Linie, so ist ∢ dbc = x. Der Beweis folgt aus §. 30.

II. Durch einen Punkt m, der außerhalb einer Linie ab liegt, eine Linie parallel mit ab zu ziehen.

Fig. 23.



Auflösung. Man ziehe aus m eine beliebige Linie md, so daß sie ab schneidet. Zu dem am Durchschnittspunkte gebildeten Winkel v construire man nun an md im Punkte m einen ihm gleichen Wechselwinkel w (nach I.). Alsdann ist mn || ab.

Anm. Diese Aufgabe löst man mechanisch mit Hülfe eines Dreiecks, welches man an der Kante eines Lineals hinschiebt.

III. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu construiren.

Auflösung. Man zeichne den Winkel, gebe seinen Schenkeln die Länge je einer der beiden Seiten und verbinde dann die beiden Endpunkte.

IV. Ein Dreieck aus einer Seite und zwei Winkeln zu construiren.

Auflösung. Sollen die zwei Winkel an der gegebenen Seite liegen, so zeichne man letztere, construire an ihren Endpunkten je einen der gegebenen Winkel und verlängere die Schenkel, bis sie sich schneiden. Soll von den zwei Winkeln nur der eine an der gegebenen Seite liegen, so verfahre man ebenso, construire aber statt des zweiten anliegenden Winkels an der betreffenden Ecke den äußeren Winkel, der gleich der Summe der beiden gegebenen Winkel ist.

Determination. Sie folgt aus §. 19, 2.

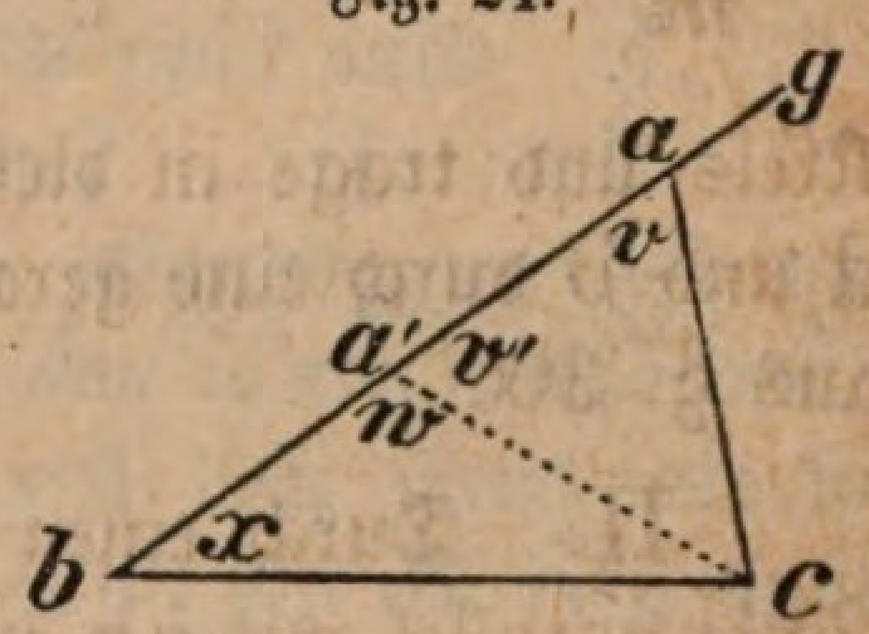
V. Ein Dreieck aus den drei Seiten A, B, C zu construiren.

Auflösung. Man zeichne eine der Seiten, z. B. C, und beschreibe aus deren Endpunkten mit den Radien B und A je einen Kreis. Die Durchschnittspunkte der beiden Kreislinien geben die dritte Ecke.

Anm. Die beiden Kreislinien können sich zweimal schneiden (§. 38, 7); die so erhaltenen zwei Dreiecke sind aber congruent. — Die Frage, wann sich die beiden Kreise schneiden müssen, kann erst später beantwortet werden. Die Determination läßt sich folglich noch nicht geben, doch mag vorläufig auf §. 25 hingewiesen werden.

VI. Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel x der einen zu construiren.

Fig. 24.



Auflösung. Man zeichne $\sphericalangle$ gbc = x, gebe dem einen Schenkel die Länge der nicht gegenüberliegenden Seite (bc) und beschreibe dann aus c als Centrum einen Kreisbogen mit der Länge der zweiten gegebenen Seite, welche dem Winkel x gegenüber liegen soll.

Trifft dieser Bogen die Linie gb gar nicht, so läßt sich aus den gegebenen Stücken überhaupt kein Dreieck construiren; trifft er einmal, so ist dadurch die dritte Ecke bestimmt; trifft er aber zweimal (siehe Figur), so erhält man zwei Dreiecke (abc und a'bc), welche beide die gegebenen Stücke enthalten, jedoch nicht congruent sind.

In diesem letzten Falle ist also das Dreieck durch die gegebenen drei Stücke nicht völlig bestimmt. Es sind aber in dem gleichschenkligen Dreiecke caa' die beiden Winkel v und v' spitz, und folglich ist w stumpf. Daher ist das gesuchte Dreieck völlig bestimmt, wenn noch angegeben wird, ob der Gegenwinkel der zweiten Seite spitz, oder stumpf sein soll. (Vergleiche §. 31.)

Determination. Ist die Gegenseite des gegebenen Winkels größer als die andere gegebene Seite, so erhält man nur ein Dreieck; ist sie kleiner, jedoch größer als die Entfernung des Punktes c von bg, so erhält man zwei Dreiecke; ist sie gleich dieser Entfernung, so erhält man nur ein Dreieck; ist sie kleiner als diese Entfernung, so erhält man kein Dreieck (Vgl. §. 31, 2).

§. 41. Erklärung.

Für die vorangehenden Constructionen war die Reihenfolge des Einzelnen im Allgemeinen schon durch die Natur der Aufgaben bestimmt. Bei den meisten geometrischen Aufgaben ist dies jedoch nicht der Fall. Man be-

trachtet alsdann die Construction als bereits ausgeführt und setzt in der Figur die Bedingungen der Aufgabe als erfüllt voraus. Die Figur hat folglich bestimmte Eigenschaften, und man kann aus derselben durch passend angebrachte Hülfslinien neue Figuren von ebenfalls bestimmten Eigenschaften ableiten, oder man kann zwischen den einzelnen Stücken neue Beziehungen finden, die in der Aufgabe nicht ausgesprochen waren. So geht man zerlegend (analytisch) rückwärts, bis man eine abgeleitete Figur erhält, auf welche sich eine bereits bekannte Construction anwenden läßt. Dann geht man von dieser Construction aus und gelangt zusammensetzend (synthetisch) durch dieselbe Reihe der Folgerungen in umgekehrter Ordnung zur Herstellung der analysirten Figur.

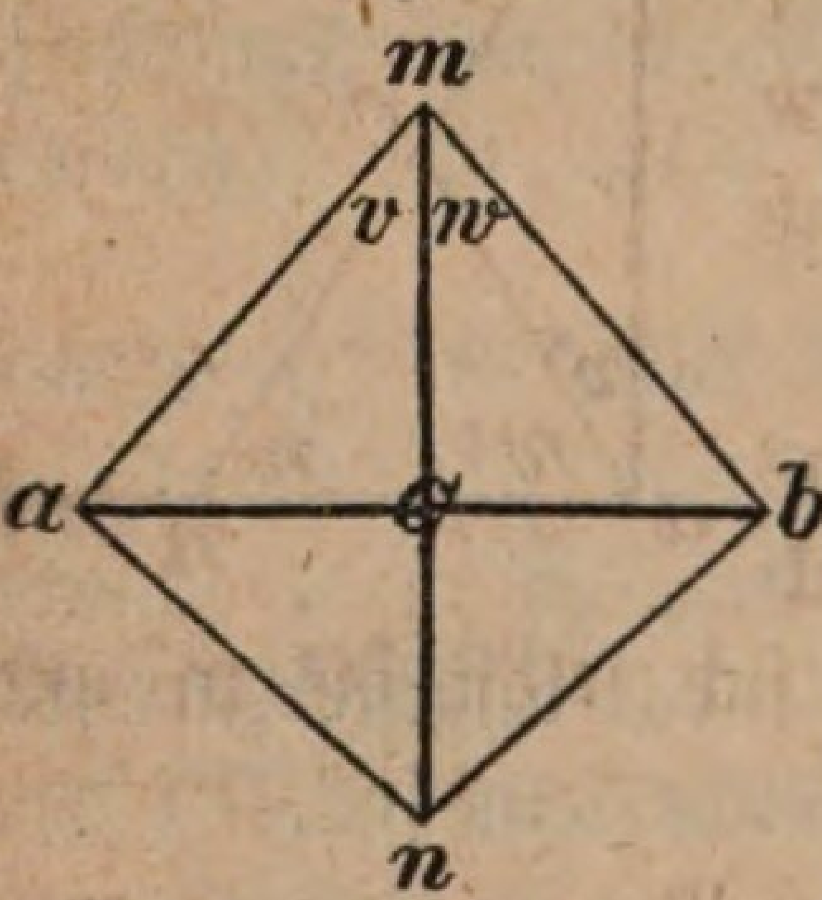
§. 42. Aufgaben.

I. Eine Linie ab zu halbiren.

Analysis. Denkt man sich die Linie ab halbirt und auf derselben im Halbirungspunkte eine Senkrechte errichtet, so sind alle Punkte dieser Senkrechten von a und b gleichweit entfernt (§. 36, 1). Diese Senkrechte ist aber durch zwei ihrer Punkte bestimmt und wird folglich erhalten, wenn man über ab als Grundlinie zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet.

Construction. Man beschreibe aus a und b zwei gleiche Bogen nach der einen, ebenso nach der anderen Seite, und verbinde darauf die Durchschnittspunkte m und n dieser gleichen Bogen durch die Linie mon.*)

Fig. 25.



Es ist alsdann ao = bo.

Beweis. Die Dreiecke mab und nab sind gleichschenklig, und es ist folglich (nach §. 36, Anm.) ao = bo.

Anm. 1. Es ist außerdem ∢ moa = R, v = w, was für die folgenden Aufgaben benutzt werden soll.

II. Einen Winkel zu halbiren.

Construction. Aus dem Scheitel m des gegebenen Winkels (Fig. 25) trage man die gleichen Stücke ma und mb auf beiden Schenkeln ab, beschreibe aus a und b mit gleicher Zirkelöffnung zwei Bogen und verbinde deren Durchschnittspunkt n mit m, so ist hierdurch der Winkel halbirt, und es ist v = w.

Beweis. Er folgt aus I.

*) Die beiden Bogen schneiden sich, wenn die beiden gleichen Radien zusammen größer als die Linie ab sind, denn es muß alsdann der eine Kreis nothwendig in die Ebene des andern eintreten (§. 38, 7). Dasselbe ist für die folgenden Aufgaben zu beachten.

III. Auf eine Linie eine Senkrechte aus dem gegebenen Punkte m zu fällen.

Construction. Man beschreibe aus m (Fig. 25) mit genügend großer Zirkelöffnung einen Bogen, der die gegebene Linie in den Punkten a und b schneidet,*) ferner aus a und b mit gleicher Zirkelöffnung zwei Bogen, die sich in n schneiden, so ist mn die gesuchte Senkrechte.

Beweis. Es folgt aus I.

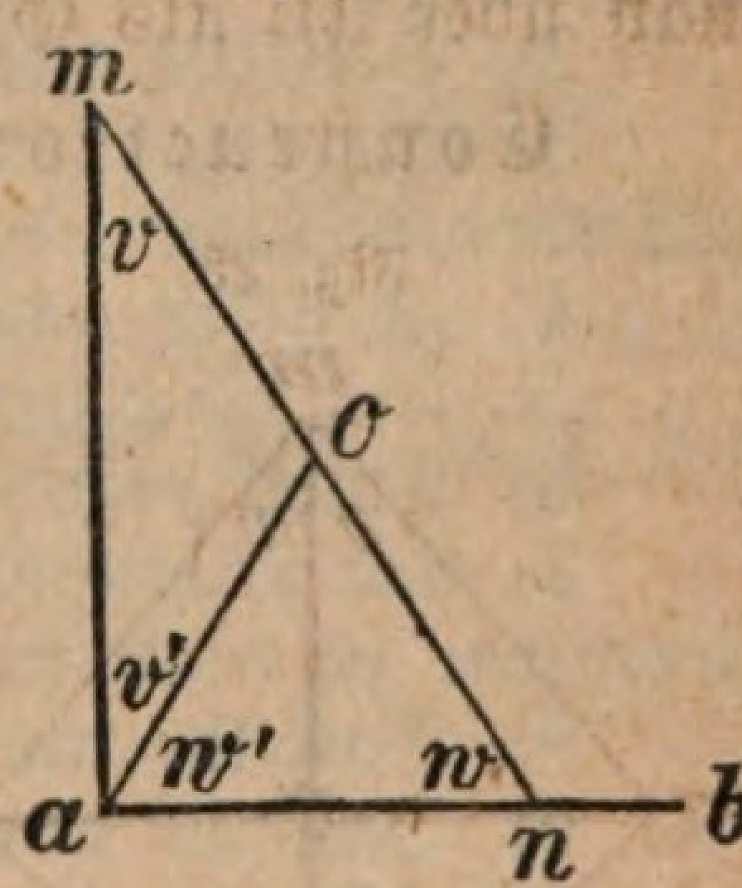
IV. Auf einer Linie eine Senkrechte in dem gegebenen Punkte o zu errichten.

Construction. Man trage aus o (Fig. 25) nach beiden Seiten die gleichen Stücke oa und ob auf der gegebenen Linie ab, beschreibe aus a und b mit gleicher Zirkelöffnung zwei Bogen und verbinde deren Durchschnittspunkt m mit o, so ist om die gesuchte Senkrechte.

Beweis. Er folgt aus I.

V. Auf einer Linie ab in dem Endpunkte a eine Senkrechte zu errichten.

Fig. 26.



Analysis. Ist am die gesuchte Senkrechte, folglich △ man rechtwinklig, v + w = R = ∢ man, so muß sich der Winkel man durch eine Linie ao so theilen lassen, daß v′ = v, w′ = w ist. Aus v′ = v folgt alsdann, daß om = oa, und aus w′ = w folgt, daß on = oa ist. Es ergiebt sich also, daß om = oa = on sein muß.

Construction. Man trage aus a auf ab das beliebige Stück an ab, errichte über an das gleichschenklige Dreieck oan, verlängere no über o hinaus um sich selbst bis m und verbinde m mit a, so ist ∢ man = R.

Beweis. Es ist oa = on, daher w = w′; ferner ist oa = on = om, daher v = v′. Nun ist v + w + v′ + w′ = 2R, folglich v′ + w′ = R.

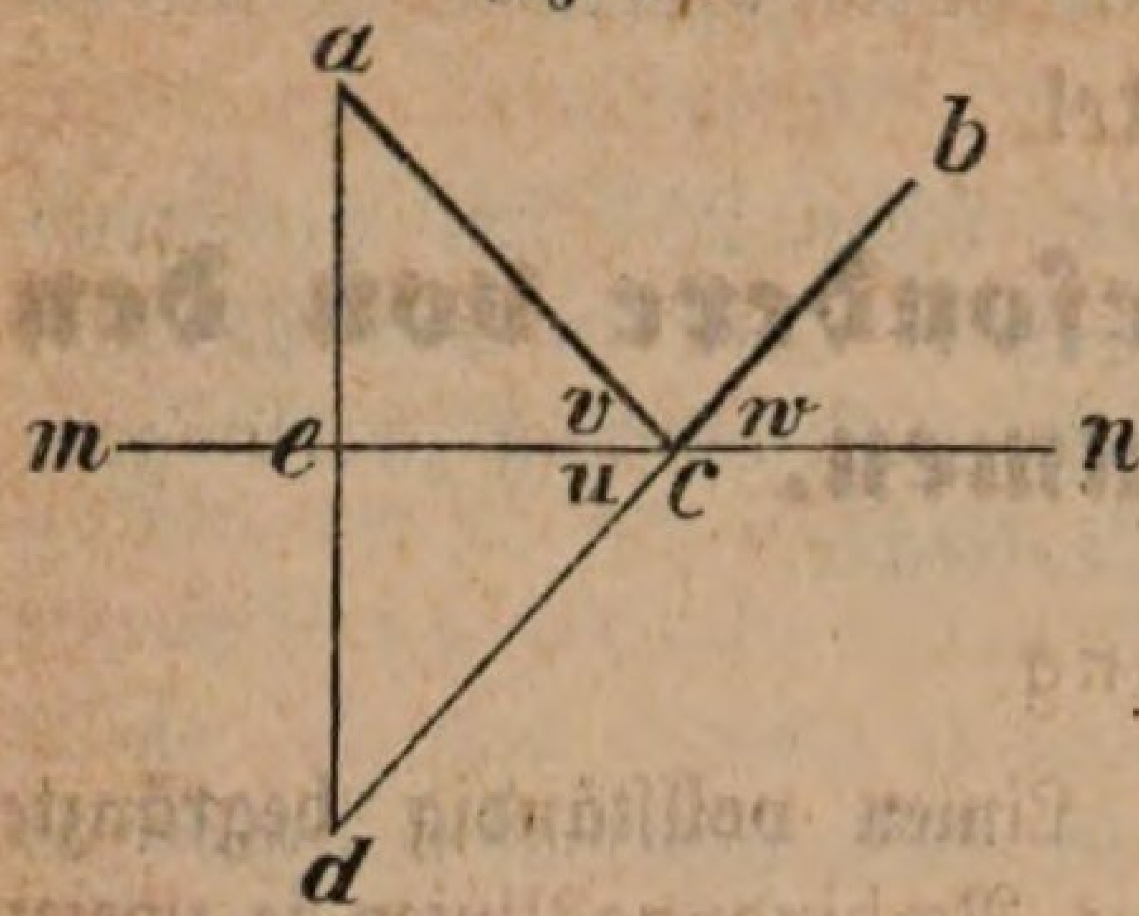
VI. Eine Linie mn und zwei außerhalb derselben liegende Punkte a und b sind gegeben. In der Linie mn einen Punkt c zu bestimmen, daß ∢ acm = ∢ bcn (v = w) sei.

Analysis. Verlängert man bc über c hinaus, so ist w = u, also auch v = u.

---

*) Der Bogen schneidet die Linie, wenn sein Radius größer ist als der senkrechte Abstand des Centrums von der Linie, denn diese muß alsdann nothwendig in die Kreisebene eintreten (§. 38, 7).

Fig. 27.



Macht man ferner cd = ca, so ist △ced ≅ △cea (§. 28), folglich ae = de, ∢ aec = R.

Construction. Man fälle aus a die Senkrechte ae auf mn, verlängere ae über e hinaus um sich selbst bis d und verbinde d mit b durch die Linie dcb, so ist c der gesuchte Punkt.

Beweis. Es ist ae = de, ec = ec, ∢ aec = ∢ dec, folglich △ aec ≅ △ dec, daher v = u = w.

Aufgaben.

1) Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse zu construiren.

2) Dasselbe aus der zur Hypotenuse gehörenden Höhe.

3) Ein gleichschenkliges Dreieck aus einem Schenkel und der zur Grundlinie gehörenden Höhe zu construiren.

4) Dasselbe aus einem Schenkel und der zugehörigen Höhe.

5) Ein gleichseitiges Dreieck aus der Höhe zu construiren.

6) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu zerlegen.

7) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse und der Summe der Catheten zu construiren.

8) Dasselbe aus der Hypotenuse und der Differenz der Catheten.

9) Dasselbe aus einer Cathete und der Summe der anderen Seiten.

10) Dasselbe aus einer Cathete und der Differenz der anderen Seiten.

11) Ein Dreieck aus der Differenz zweier Seiten, dem Gegenwinkel der größeren und aus der dritten Seite zu construiren.

12) Dasselbe aus der Summe zweier Seiten, der dritten Seite und der Differenz der beiden ihr anliegenden Winkel. *)

13) Ein Dreieck aus zwei Winkeln und der Summe der drei Seiten zu construiren.

14) Durch einen gegebenen Punkt eine Linie so zu ziehen, daß die aus zwei anderen gegebenen Punkten auf dieselbe gefällten Senkrechten gleich groß sind.

---

*) Vergleiche Fig. 10. Der Nebenwinkel des Winkels c′cb ist gleich y + ∢ abc = x + ∢ abc, und es haben also ∢ c′cb und sein Nebenwinkel dieselbe Differenz wie ∢ acb und ∢ abc.

Sechstes Capitel.

Von den Vierecken, insbesondere von den Parallelogrammen.

§. 43. Erklärung.

Ein Viereck ist eine von vier geraden Linien vollständig begränzte Ebene. Die vier Linien heißen Seiten; die Verbindungslinien je zweier nicht auf einander folgenden Ecken heißen Diagonalen.

Sind in einem Vierecke je zwei Seiten parallel, so heißt es ein Parallelogramm (#); sind bloß zwei Seiten parallel, so heißt es ein Trapez; ist keine Seite der andern parallel, so heißt es ein Trapezoid.

§. 44. Lehrsätze.

1) Die Summe der inneren Winkel eines Vierecks beträgt 4R.

Beweis. Jedes Viereck läßt sich durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegen, deren innere Winkel (nach §. 19) zusammen 4R betragen.

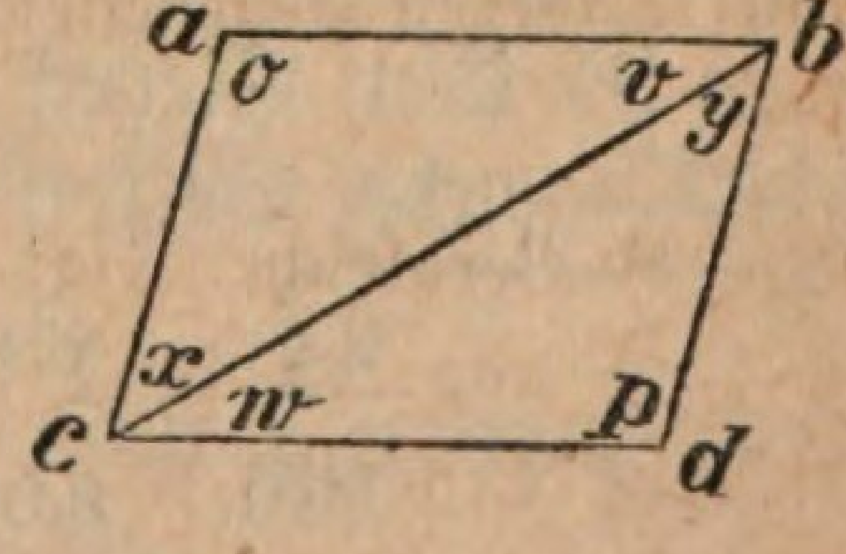
2) In einem Parallelogramme sind je zwei Winkel, welche an der nämlichen Seite liegen, Supplementwinkel; in einem Trapeze sind es je zwei Winkel, welche an einer der nicht parallelen Seite liegen.

Beweis. Er folgt aus §. 17, 1.

§. 45. Lehrsätze.

1) Ein Parallelogramm wird durch jede Diagonale in zwei congruente Dreiecke zerlegt; ferner sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich.

Fig. 28.



Vor. abcd ist ein #.

Beh. $\triangle$ abc $\cong$ $\triangle$ dcb.

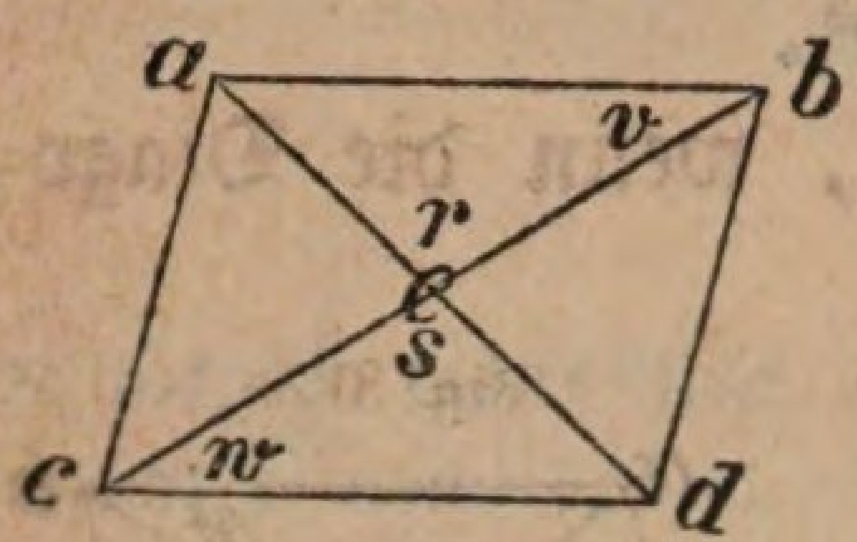
Beweis. Es ist $v = w$ } als Wechselwinkel,
$x = y$ }
$bc = cb$,
daher $\triangle$ abc $\cong$ $\triangle$ dcb.

Hieraus folgt, daß $o = p$, $ab = dc$, $ac = db$ ist.

Dieselben Folgerungen ergeben sich, wenn man statt der Diagonale bc die Diagonale ad zieht.

2) In einem Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen.

Fig. 29.



Vor. abcd ist ein #.

Beh. ae = de; be = ce.

Beweis. Es ist ab = dc, v = w, r = s, daher △ abe ≅ △ dce, folglich ae = de, be = ce.

Anm. zu 2. Den Punkt e nennt man den Mittelpunkt des Parallelogramms.

§. 46. Zusatz.

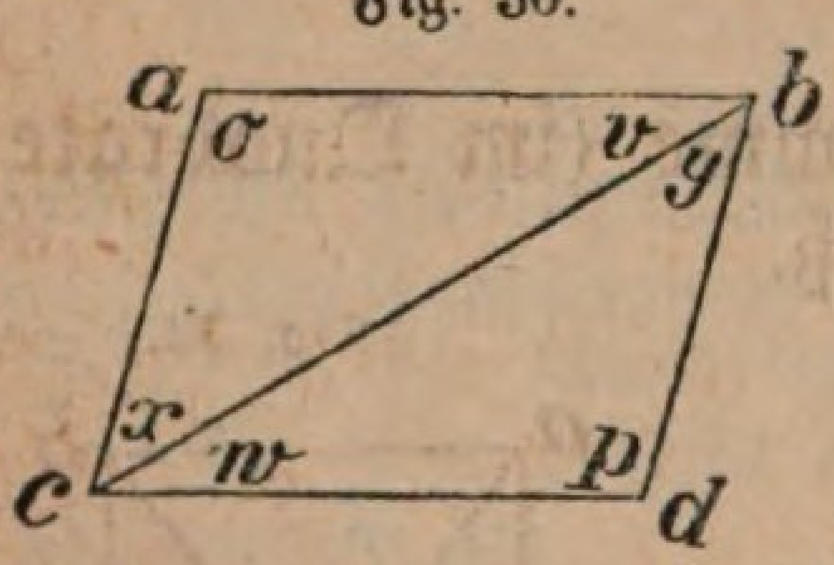
Aus vorigem §. ergiebt sich, daß parallele Linien, die von Parallelen begränzt werden, gleich groß sind, daß also auch parallele Linien überall gleichen senkrechten Abstand oder gleiche Entfernung haben.

Die Entfernung zweier parallelen Seiten eines Vierecks nennt man eine Höhe desselben. Ein Parallelogramm hat daher zwei Höhen, ein Trapez eine, ein Trapezoid keine.

§. 47. Lehrsätze.

1) Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die gegenüberliegenden Seiten gleich groß sind.

Fig. 30.



Vor. ab = dc; ac = db.

Beh. abcd ist ein #.

Beweis. Es ist △abc ≅ △dcb, weil beide Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen. Hieraus folgt, daß v = w, x = y, oder daß ba || cd, ca || bd ist.

2) Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn zwei gegenüberliegende Seiten gleich groß und parallel sind (Fig. 30).

Vor. ab = dc; ab || dc (oder v = w).

Beh. abcd ist ein #.

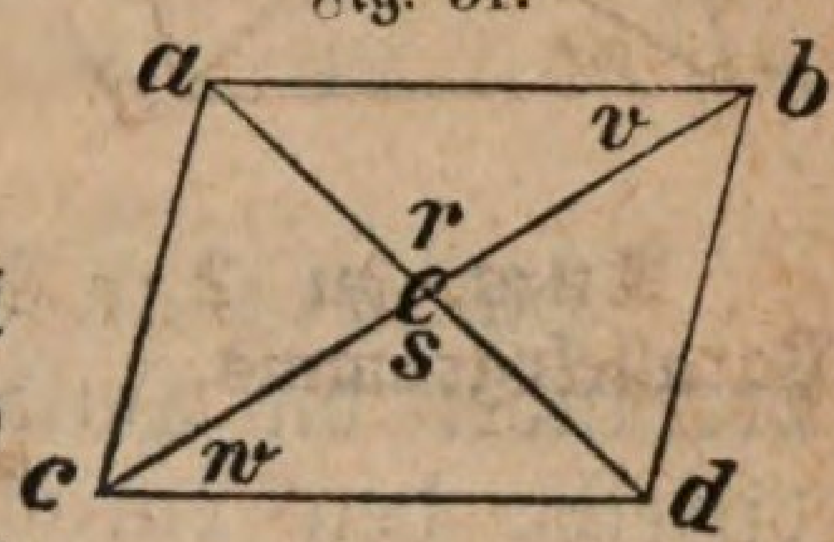
Beweis. Es ist △ abc ≅ △ dcb, weil ab = dc, bc = cb, v = w ist. Das Weitere folgt aus 1.

3) Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind.

Beweis. Die inneren Winkel betragen zusammen 4R. Sind die gegenüberliegenden Winkel gleich groß, so betragen je zwei, die an derselben Seite liegen, 2R. Das Weitere folgt aus §. 17, 1.

4) Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn die Diagonalen sich halbiren.

Fig. 31.



Vor. ae = de; be = ce.

Beh. abcd ist ein ⌗.

Beweis. Es ist △ aeb ≅ △ dec, weil ae = de, be = ce, r = s ist. Es ist folglich ab = dc, v = w, daher abcd ein ⌗ (nach 2).

Anm. zu 2. Errichtet man auf einer Geraden ab gleich große Linien unter gleichen Winkeln, so liegen die zweiten Endpunkte dieser Linien in einer Geraden, welche mit ab parallel ist. (Geometrischer Ort.)

§. 48. Erklärung.

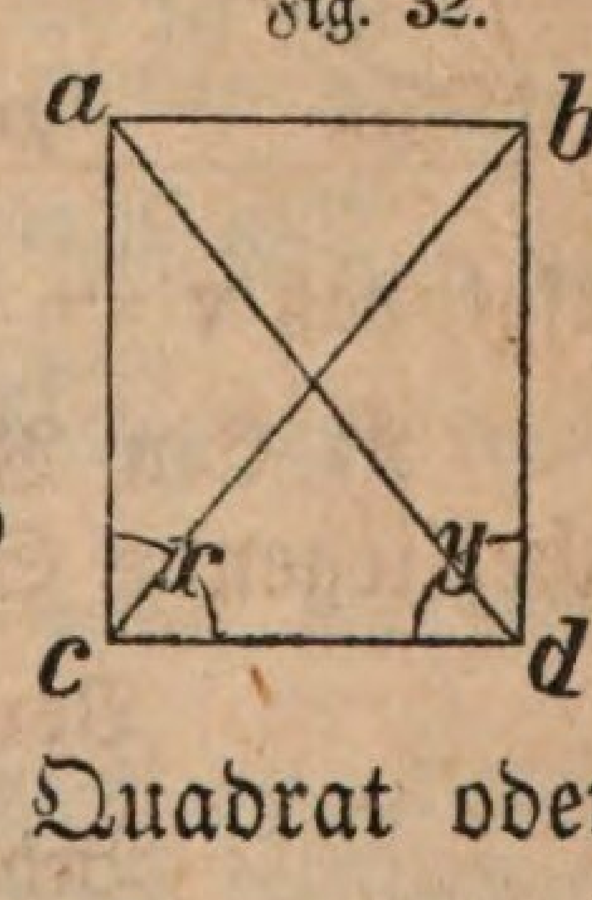
Ein Parallelogramm heißt ein Rhombus (eine Raute), wenn die vier Seiten einander gleich sind; ist außerdem jeder der vier Winkel ein rechter, so heißt es ein Quadrat.

Ein Parallelogramm heißt ein Rhomboid, wenn nur die gegenüberliegenden Seiten einander gleich sind; ist außerdem jeder der vier Winkel ein rechter, so heißt es ein Rechteck.

§. 49. Lehrsätze.

1) In einem rechtwinkligen Parallelogramme (im Quadrate und Rechtecke) sind die Diagonalen gleich groß.

Fig. 32.



Vor. abcd ist ein ⌗;

x = y = R.

Beh. ad = bc.

Beweis. Es ist ac = bd, cd = dc, x = y, also △ acd ≅ △ bdc, daher ad = bc.

2) Ein Parallelogramm ist rechtwinklig (ein Quadrat oder Rechteck), wenn die Diagonalen gleich groß sind.

Beweis. Er wird ähnlich geführt, wie der Beweis zu 1. (Vergl. §. 42, V.)

§. 50. Lehrsätze.

1) In einem gleichseitigen Parallelogramme (im Quadrate und Rhombus) stehen die Diagonalen senkrecht auf einander.

Beweis. Er folgt aus §. 36, Anm.

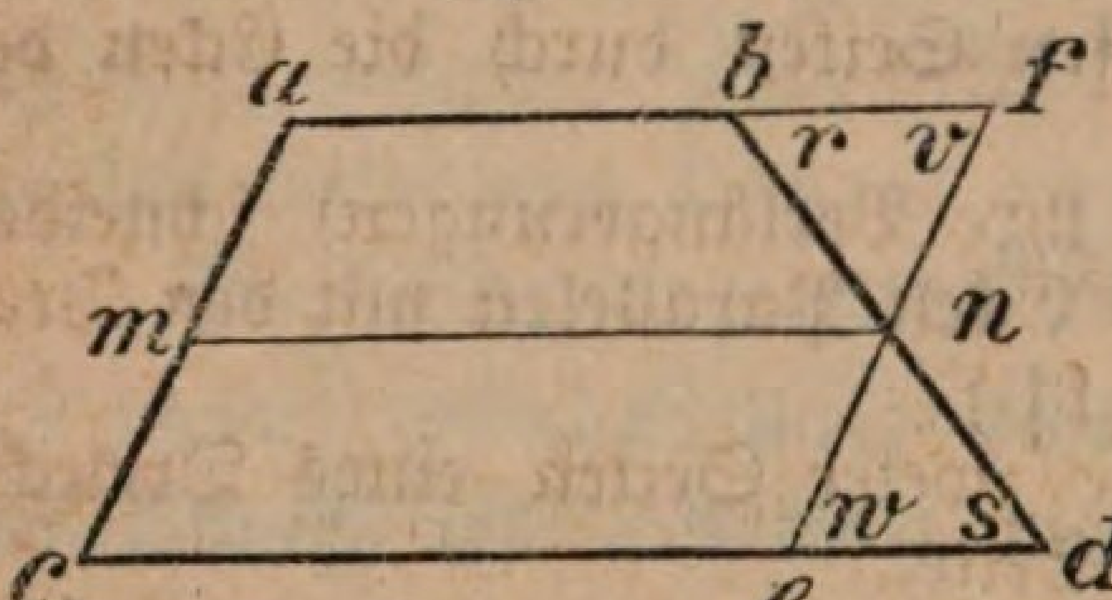
2) Ein Parallelogramm ist gleichseitig (ein Rhombus oder Quadrat), wenn die Diagonalen senkrecht auf einander stehen.

Beweis. Er folgt aus §. 36, 1.

§. 51. Lehrsatz.

Halbirt man die nicht parallelen Seiten eines Trapezes und verbindet die Halbirungspunkte durch eine gerade Linie, so ist dieselbe den parallelen Seiten parallel und ist halb so groß als die Summe derselben.

Fig. 33.



Vor. $ab \parallel cd$,
$am = mc$,
$bn = nd$.

Beh. 1) $mn \parallel cd$,

2) $mn = \frac{ab + cd}{2}$.

Beweis. Verlängert man ab über b hinaus und zieht durch den Punkt n die Linie ef parallel mit ca, so ist $\triangle\ bnf \cong \triangle\ dne$, weil $bn = dn$, $r = s$, $v = w$ ist. Es ist folglich:

a) $bf = de$, daher $ab + cd = af + ce = 2ce$,

oder $ce = \frac{ab + cd}{2}$;

b) $nf = ne$, daher $ne = mc$, weil ne die Hälfte von fe, mc die Hälfte von ac ist.

Nun ist $ne = mc$, ferner $ne \parallel mc$, also mnce ein $\#$, daher

$$1)\ mn \parallel cd, \quad 2)\ mn = ce = \frac{ab + cd}{2}.$$

Uebungssätze und Aufgaben.

1) Die Summe der Diagonalen eines Vierecks ist größer als der halbe, kleiner als der ganze Umfang.

2) Die Halbirungslinien zweier äußern Winkel eines Dreiecks bilden mit den Halbirungslinien der anliegenden innern Winkel ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Winkel zwei Rechte betragen.

3) Ein Parallelogramm wird von jeder durch den Mittelpunkt gezogenen Linie in zwei congruente Hälften getheilt.

4) Halbirt man alle Seiten eines Parallelogramms und verbindet die Halbirungspunkte, so entsteht wieder ein Parallelogramm.

5) Ein Viereck ist ein Rhombus oder Quadrat, wenn die Winkel desselben durch die Diagonalen halbirt werden.

6) Trägt man aus den Ecken eines Parallelogramms auf den Seiten nach derselben Richtung hin gleiche Stücke ab und verbindet die Endpunkte derselben, so entsteht wieder ein Parallelogramm.

7) Theilt man die Diagonale eines Parallelogramms in drei gleiche Theile und zieht aus den Ecken, welche diese Diagonale nicht verbindet, gerade Linien durch die Theilpunkte, so halbiren diese Linien die Seiten des Parallelogramms.

8) Parallelen, die von einer Linie gleiche Stücke abschneiden, schneiden von jeder andern hindurchgezogenen Linie ebenfalls gleiche Stücke ab.

9) Die Halbirungslinien aller Winkel eines Rechtecks bilden ein Quadrat, dessen Diagonale gleich dem Unterschiede der Rechtecksseiten ist.

10) Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten eines Rhombus, so entsteht ein Rechteck.

11) Zieht man durch die Ecken eines Dreiecks Parallelen mit den Dreiecksseiten, so entsteht ein neues Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des ersteren halbirt werden.

12) Die drei Höhen eines Dreiecks (oder ihre Verlängerungen) schneiden sich in einem Punkte. (Man ziehe durch die Ecken Parallelen mit den Dreiecksseiten und benutze §. 38, 3 und Aufgabe 11.)

13) Verbindet man die Halbirungspunkte zweier Seiten eines Dreiecks, so ist diese Linie halb so groß als die dritte Seite.

14) Sind die nicht parallelen Seiten eines Trapezes gleich groß, so sind auch die Diagonalen gleich groß, ebenso die zwei an einer der parallelen Seiten liegenden Winkel; durch Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkte entsteht ferner ein gleichschenkliges Dreieck.

15) Sind in einem Vierecke die Diagonalen gleich groß und ebenso zwei gegenüberliegende Seiten, so sind die anderen zwei Seiten parallel.

16) Wenn man aus den Endpunkten der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks auf dem einen Schenkel selbst und auf der Verlängerung des andern zwei Stücke von beliebiger aber gleicher Länge abschneidet, so wird die Gerade, welche diese beiden Abschnittspunkte verbindet, durch die Grundlinie halbirt.

17) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in zwei Seiten und drei Winkeln nach Lage und Größe übereinstimmen.

18) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in drei Seiten und den zwei von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln übereinstimmen.

19) Zwei Vierecke sind congruent, wenn sie in allen Seiten und einem Winkel nach Lage und Größe übereinstimmen.

20) Durch eine Linie von bestimmter Länge unter einem gegebenen Winkel zwei convergirende Linien zu verbinden.

21) Durch einen innerhalb eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß das zwischen den Schenkeln enthaltene Stück derselben in dem genannten Punkte halbirt wird.

22) Ein Dreieck aus zwei Seiten und der Linie, welche die Mitte der dritten Seite mit der Gegenecke verbindet, zu construiren.

23) Einen Rhombus aus einem Winkel und der Summe der kleinern (größern) Diagonale und der Seite zu construiren.

24) Einen Rhombus aus einem Winkel und der Summe der Diagonalen zu construiren.

25) Ein Trapez aus den beiden parallelen Seiten und den an einer derselben liegenden Winkeln zu construiren.

26) Ein Trapez aus der Höhe, den nicht parallelen Seiten und der Entfernung ihres Durchschnittspunktes von der Grundlinie zu construiren.

27) Ein Viereck aus drei Seiten und den beiden Winkeln, die an der vierten Seite liegen, zu construiren.

28) Ein Quadrat durch vier Linien so zu zertheilen, daß bei gehöriger Zusammensetzung der Theile fünf gleiche Quadrate entstehen.

29) Eine gegebene Linie in m gleiche Theile zu theilen.

Siebentes Capitel.

Von den Vielecken.

§. 52. Erklärung.

Ein Vieleck oder Polygon ist eine von mehr als vier geraden Linien (Seiten) begränzte Ebene. Hat dasselbe fünf, sechs u. s. w. Seiten, so nennt man es Fünfeck, Sechseck u. s. w. Sollen Dreiecke und Vierecke nicht ausgeschlossen werden, so gebraucht man statt des Namens Vieleck die Bezeichnung neck. Die Namen Diagonale, äußere, innere Winkel (Umfangswinkel) behalten ihre bisherige Bedeutung. Ein neck heißt regulär, wenn alle Seiten und Winkel desselben gleich groß sind.

§. 53. Lehrsatz.

Die Summe der inneren Winkel eines necks beträgt 2nR—4R.

Beweis. Verwandelt man ein neck dadurch in ein (n — 1)eck, daß man durch eine Diagonale ein Dreieck abschneidet, so wird die Summe der inneren Winkel um 2R kleiner. Das neck hat also 2R mehr als das vorhergehende (n — 1)eck.

Nun beträgt die Summe der inneren Winkel eines Dreiecks 2R, die eines Vierecks 2 . 2R, die eines Fünfecks 3 . 2R, also die eines necks (n — 2) . 2R = 2nR — 4R.

§. 54. Lehrsatz.

Die Summe der äußeren Winkel eines necks, dessen innere Winkel sämmtlich hohl sind, beträgt 4R.

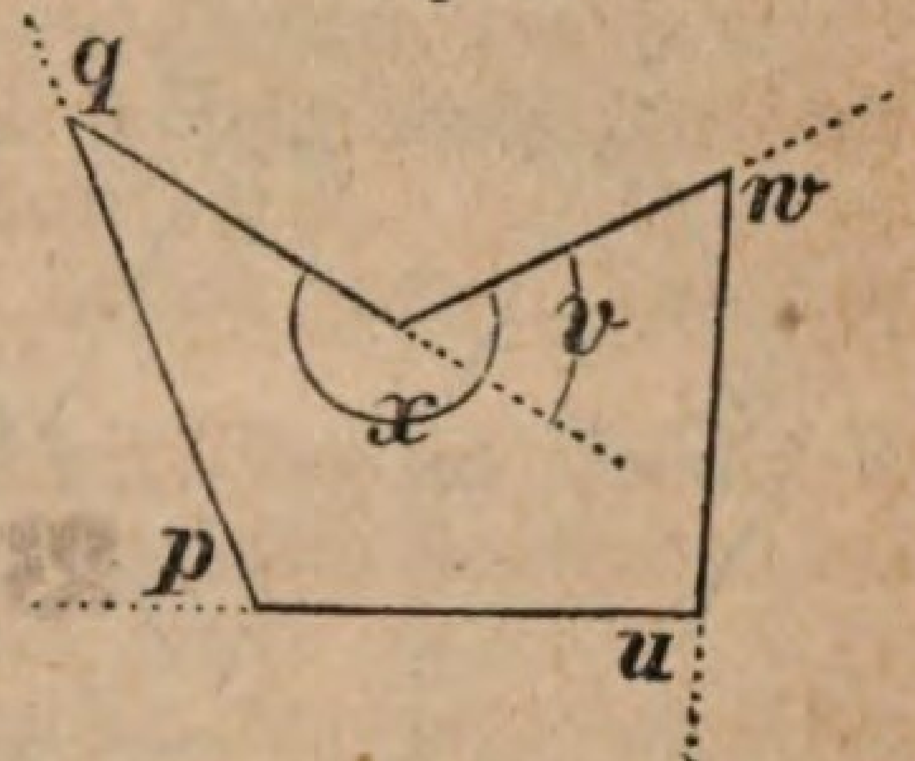
Beweis. Jeder äußere Winkel ist das Supplement eines inneren, und die Summe aller äußeren und inneren Winkel beträgt also 2nR. Die Summe der inneren Winkel allein beträgt 2nR — 4R, folglich ist die der äußeren gleich 4R.

Anm. Denkt man sich einen Punkt auf dem Umfange des necks bewegt, so ändert er an jeder Ecke seine Richtung, und die Summe aller dieser Abweichungen (der äußeren Winkel) ist gleich einer ganzen Umdrehung.

§. 55. Zusatz.

Ist ein innerer Winkel eines necks erhaben, wie z. B. in beistehender Figur der Winkel x, so ist an dieser Ecke der äußere Winkel v, der innerhalb der Figur liegt, nicht das Supplement von x, sondern es ist $x - v = 2R$. Bliebe im Uebrigen der Beweis des vorigen §. unverändert, so würde sich ergeben, daß $p + q - v + w + u = 4R$ ist. Wenn also die inneren Winkel eines necks nicht sämmtlich hohl sind, so beträgt die algebraische Summe der äußeren Winkel 4R, d. h. diejenigen äußeren Winkel, welche innerhalb der Figur liegen, sind subtractiv in Rechnung zu bringen.

Fig. 34.



Anm. 1. Denkt man sich einen Punkt auf dem Umfange des necks bewegt, so macht er im Scheitel des Winkels v eine rückgängige Bewegung, durch welche die Gesammtabweichung von der anfänglichen Richtung verkleinert wird.

Anm. 2. Bei jedem geometrischen Beweise muß irgend eine Figur zu Grunde gelegt werden. Zuweilen können aber die Größen, auf welche sich der Satz bezieht, eine entgegengesetzte Lage haben, wie z. B. im vorangehenden Lehrsatze ein äußerer Winkel außerhalb und innerhalb der Figur liegen kann. Alsdann kann zu jeder der beiden Lagen ein besonderer Lehrsatz und ein besonderer Beweis gehören. Vergleicht man aber zwei derartige Lehrsätze und Beweise mit einander, so ergiebt sich im Allgemeinen, daß man den einen leicht aus dem andern ableiten kann, wenn man den entgegengesetzt liegenden Größen das entgegengesetzte Vorzeichen giebt.

§. 56. Lehrsatz.

Die Anzahl der Diagonalen eines necks beträgt $\frac{n.(n-3)}{2}$.

Beweis. Aus einer beliebigen Ecke kann man (n — 3) Diagonalen ziehen, folglich aus allen n Ecken n . (n — 3). Auf diese Art ist jedoch jede Diagonale zweimal gezogen, und die wirkliche Anzahl beträgt daher die Hälfte.

§. 57. Lehrsatz.

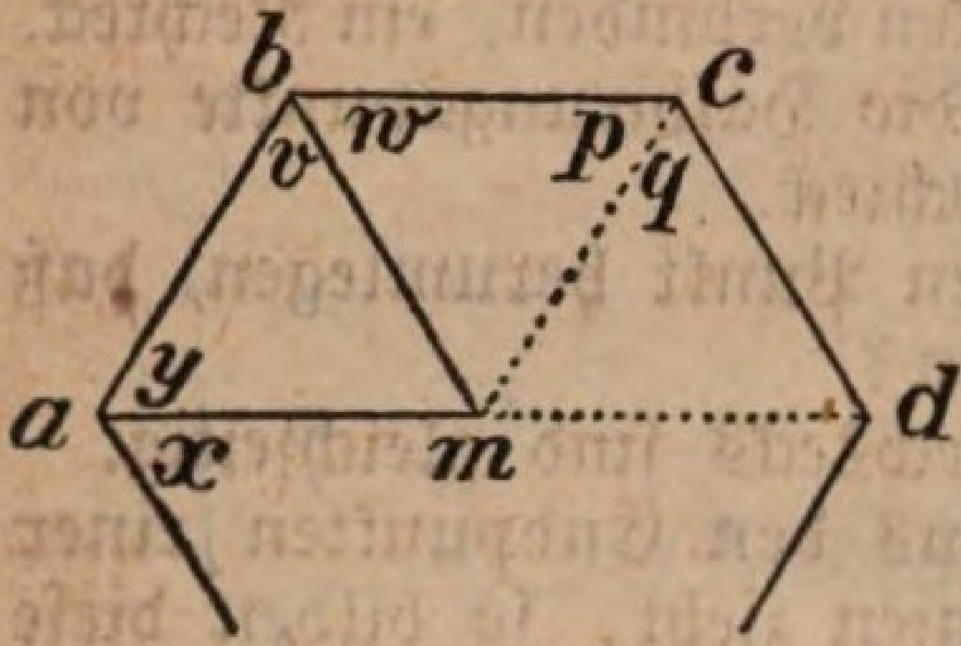
Das umschließende Vieleck hat einen größeren Umfang als das umschlossene, wenn die Umfangswinkel des letzteren hohl sind.

Beweis. Es wird ähnlich geführt, wie der Beweis in §. 26.

§. 58. Lehrsatz.

In jedem regulären Vielecke findet sich ein Punkt, der von allen Seiten, wie auch von allen Ecken gleich weit absteht.

Fig. 35.



Construction. Sind a, b, c, d vier Ecken eines regulären necks, so halbire man zwei Umfangswinkel, z. B. die Winkel an den Ecken a und b, und verlängere die Halbirungslinien bis zum Durchschnittspunkte m. Dieser ist der gesuchte Punkt und heißt Mittelpunkt (Vergl. §. 37).

Beweis. Die Winkel x, y, v, w sind jeder gleich dem halben Umfangswinkel, und es ist deshalb △ mab gleichschenklig. Nun ist △ mba ≅ △ mbc, weil ab = cb, mb = mb, v = w ist. Es ist daher auch △ mbc gleichschenklig, und es ist p, folglich auch q, gleich der Hälfte des Umfangswinkels. In derselben Art läßt sich nun beweisen, daß △ mbc ≅ △ mdc ist u. s. w. Sämmtliche Dreiecke, deren Grundlinien Seiten des necks sind, und deren Spitzen in m liegen, sind also congruent und gleichschenklig.

Es sind folglich ihre Schenkel einander gleich, d. h. die Entfernungen des Punktes m von den Ecken, ferner ihre Höhen (§. 34, 1), d. h. die Entfernungen des Punktes m von den Seiten des necks.

Aus der Congruenz ergiebt sich ferner, daß alle um m herum liegenden Winkel, die Mittelpunktswinkel, einander gleich sind.

Anm. Der Punkt m kann auch dadurch gefunden werden, daß man auf zwei nicht parallelen Seiten in ihren Mitten Senkrechte errichtet und diese bis zum Durchschnitt verlängert.

§. 59. Zusatz.

Für die regulären necke läßt sich die Größe des einzelnen innern oder äußern Winkels leicht berechnen (§§. 53 u. 54). Ist nun ein solcher Winkel außerdem auch geometrisch construirbar, so ist es ebenso das betreffende neck. Dies ist der Fall bei den Winkeln von 90^0 und 60^0, welche als Mittelpunktswinkel dem regulären Viereck und Sechseck zugehören. Außerdem lassen sich alle diejenigen regulären necke construiren, deren Mittelpunktswin-

kel durch Halbiren oder Verdoppeln jener Winkel entstehen, also das 8, 16, 32...eck, ferner das 3, 12, 24, 48...eck.

Uebungssätze und Aufgaben.

1) Die Größe der Umfangs- und Mittelpunktswinkel eines regulären necks zu berechnen.

2) Wenn man jede Seite eines gleichseitigen Dreiecks in drei gleiche Theile theilt und je zwei einer Winkelspitze zunächst liegende Theilungspunkte durch eine gerade Linie verbindet, so entsteht ein reguläres Sechseck.

3) In einem Fünfecke ist die Summe der Diagonalen größer als der Umfang.

4) In einem regulären Sechsecke (2necke) sind je zwei Gegenseiten parallel und bilden mit den zwei Linien, welche ihre Ecken verbinden, ein Rechteck.

5) Wenn man in einem regulären Sechsecke die Halbirungspunkte von vier parallelen Seiten verbindet, so entsteht ein Rechteck.

6) Welche regulären necke lassen sich so um einen Punkt herumlegen, daß sie, ohne eine Lücke zu lassen, den Raum ausfüllen?

7) Die Mittelpunktsdreiecke eines regulären Sechsecks sind gleichseitig.

8) Wenn man in einem regulären Fünfecke aus den Endpunkten einer Seite nach den gegenüberliegenden Ecken gerade Linien zieht, so bilden diese mit der genannten Seite ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem jeder Winkel an der Grundlinie doppelt so groß ist, als der Winkel an der Spitze.

9) Wenn man in einem regulären 2necke aus dem Mittelpunkte Linien nach zwei gegenüberstehenden Ecken oder nach den Mitten zweier gegenüberliegenden Seiten zieht, so bilden dieselben eine gerade Linie, welche das 2neck in zwei congruente Hälften theilt.

Achtes Capitel.

Vom Kreise.

§. 60. Erklärung.

Ein Kreis ist eine von der Kreislinie (Peripherie) begränzte Ebene.*) Die gerade Verbindungslinie zweier Punkte der Peripherie heißt Sehne, und wenn sie durch den Mittelpunkt geht, Diameter oder Durchmesser. Eine über die Peripherie hinaus verlängerte Sehne heißt Secante (schneidende Linie). Eine Linie, welche den Kreis berührt (§. 4), heißt Tangente.

Kreisabschnitte (Segmente) und Kreisausschnitte (Sectoren) sind Theile des Kreises. Erstere werden von einer Sehne und dem

*) Die in §. 3 gegebenen Erklärungen sind hier zu wiederholen.

zugehörigen Bogen, letztere von zwei Radien und dem zugehörigen Bogen begränzt. Ein Kreisausschnitt heißt Quadrant, Sextant, Octant, je nachdem der Winkel, den die Radien bilden, den 4ten, 6ten, 8ten Theil von 4R beträgt.

Zwei sich schneidende Sehnen bilden einen Sehnenwinkel, zwei sich schneidende Secanten einen Secantenwinkel. Der Sehnenwinkel heißt Umfangs- oder Peripheriewinkel, wenn sein Scheitel in der Peripherie liegt; er heißt Mittelpunkts- oder Centriwinkel, wenn sein Scheitel im Centrum liegt.

Zwei Kreise heißen concentrisch, wenn sie denselben Mittelpunkt, excentrisch, wenn sie verschiedene Mittelpunkte haben. Die gerade Verbindungslinie dieser Mittelpunkte heißt Centrale.

Ein neck ist in den Kreis beschrieben, wenn seine Seiten Sehnen, um den Kreis beschrieben, wenn seine Seiten Tangenten sind.

A. Von den Linien und Winkeln im Kreise.

§. 61. Lehrsätze.

1) Die Radien eines Kreises sind gleich groß, ebenso die Durchmesser.

2) Ein Kreis wird von einer geraden Linie nur in zwei Punkten geschnitten.

3) Eine Sehne wird von dem Radius, der senkrecht auf ihr steht, halbirt, und umgekehrt steht der halbirende Radius senkrecht.

4) Die auf einer Sehne in ihrer Mitte errichtete Senkrechte geht durch den Mittelpunkt.

5) Die auf zwei nicht parallelen Sehnen in ihren Mitten errichteten Senkrechten schneiden sich im Mittelpunkte.

Beweis zu 1. Er folgt aus den betreffenden Erklärungen.

Beweis zu 2. Vergleiche §. 38, 5 und 7.

Beweise zu 3 und 4. Sie folgen aus §§. 33 und 36.

Beweis zu 5. Er folgt aus 4 oder aus §. 37, 1.

§. 62. Lehrsätze.

1) Gleiche Sehnen sind gleich weit vom Mittelpunkte entfernt, und gleich weit vom Mittelpunkte entfernte Sehnen sind gleich groß.

2) Die größere Sehne liegt dem Mittelpunkte näher, als die kleinere, und die dem Mittelpunkte näher liegende Sehne ist die größere.

Beweise zu 1 und 2. Sie folgen unmittelbar aus §. 34, 1 und 2.

§. 63. Lehrsätze.

1) Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleiche Bogen; zum größeren Centriwinkel gehört der größere Bogen.

2) Zu gleichen Bogen gehören gleiche Centriwinkel; zum größeren Bogen gehört der größere Centriwinkel.

3) Zu gleichen Centriwinkeln (Bogen) gehören gleiche Sehnen, congruente Segmente und Sectoren; zu congruenten Sectoren und Segmenten gehören stets gleiche Centriwinkel, zu gleichen Sehnen nur dann, wenn die Centriwinkel nicht größer als 2R sein können.

4) Zum größeren Centriwinkel (Bogen) gehört die größere Sehne, zur größeren Sehne der größere Centriwinkel, wenn in beiden Fällen die Centriwinkel nicht größer als 2R sein können.

Beweis zu 1. Denkt man sich die beiden gleichen Centriwinkel so aufeinandergelegt, daß Scheitel und Schenkel aufeinanderfallen, so müssen auch die Bogen in allen Punkten sich decken, weil alle Radien gleich groß sind. — Der zweite Theil des Satzes folgt daraus, daß mit wachsendem Centriwinkel auch der zugehörige Bogen wachsen muß.

Beweis zu 2. Er wird indirekt geführt und folgt aus 1.

Beweis zu 3. Er folgt aus 1. Die Umkehrung gilt für die Sehnen nur mit der angeführten Beschränkung, weil zu denselben jedesmal zwei Centriwinkel gehören, die sich zu 4R ergänzen.

Beweis zu 4. Er folgt unmittelbar aus §. 34, 3. Der Grund für die angegebene Beschränkung ist bereits im Beweise zu 3 angeführt.

Anm. zu 1. Denkt man sich die Peripherie in 360 gleiche Theile getheilt, so entspricht jedem derselben ein Centriwinkel von 1°. Man nennt deshalb auch den 360sten Theil der Peripherie einen Grad (Bogengrad).

Anm. zu 3. Aus diesem Satze folgt, daß ein Kreis durch jeden Durchmesser in zwei congruente Hälften zerlegt wird, ferner, daß in einem Kreise alle Quadranten, alle Sextanten u. s. w. congruent sind.

§. 64. Lehrsätze.

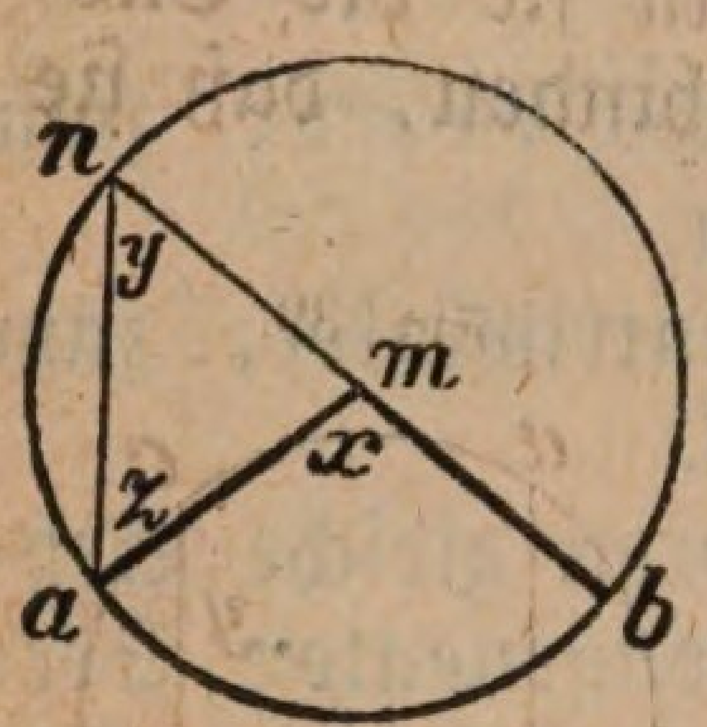
1) Ein Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß als jeder auf demselben Bogen stehende Peripheriewinkel (Fig. 36—38).

Vor. Der Centriwinkel x und der Peripheriewinkel y stehen auf demselben Bogen ab.

Beh. $x = 2y$.

Beweis. Derselbe ist für drei verschiedene Fälle zu führen. Ist jedoch der Centriwinkel nicht hohl, so ist nur der unter b) erwähnte Fall möglich.

Fig. 36.



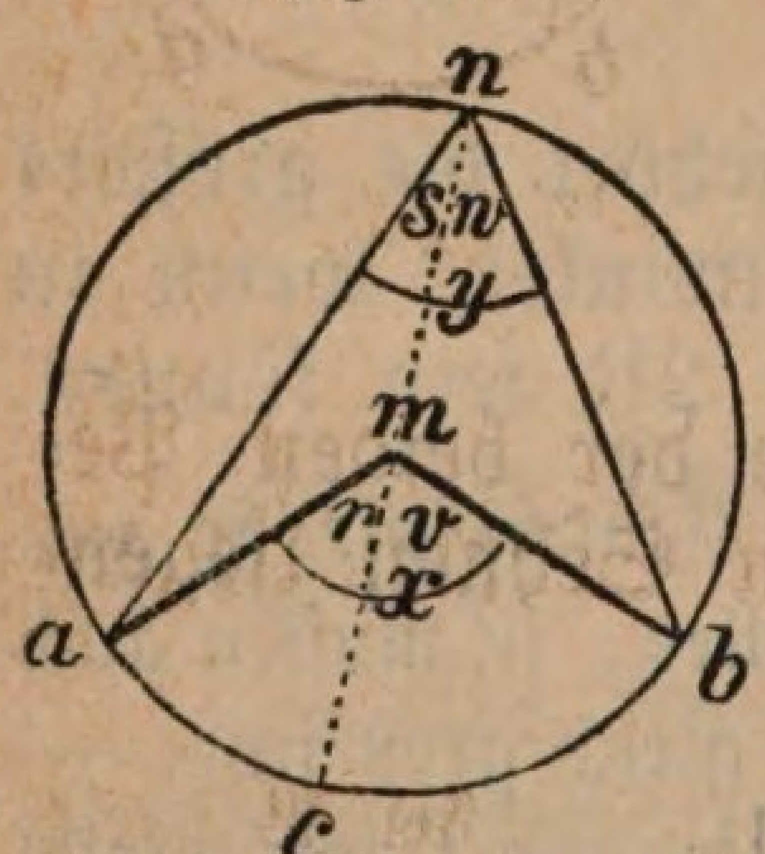
a) Wenn der eine Schenkel des Centriwinkels in einen Schenkel des Peripheriewinkels fällt (Fig. 36), so ist

$$x = y + z \text{ (§. 19, 1)},$$

$$z = y,$$

also $x = 2y$.

Fig. 37.

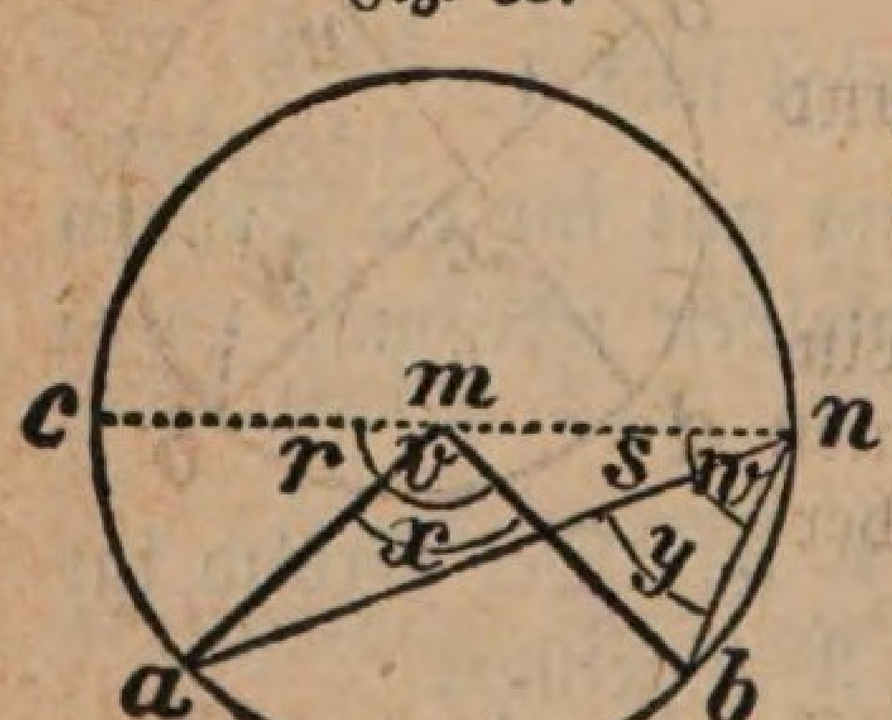


b) Wenn die Schenkel des Peripheriewinkels den Centriwinkel einschließen (Fig. 37), so ziehe man durch die beiden Scheitel den Durchmesser nmc.

Alsdann ist $\left.\begin{aligned} v &= 2w \\ r &= 2s \end{aligned}\right\}$ nach a),

folglich $v + r = 2(w + s)$, oder $x = 2y$.

Fig. 38.



c) Wenn ein Schenkel des Peripheriewinkels einen Schenkel des Centriwinkels schneidet (Fig. 38), so ziehe man wie bei b) den Durchmesser nmc.

Alsdann ist $\left.\begin{aligned} v &= 2w \\ r &= 2s \end{aligned}\right\}$ nach a),

folglich $v - r = 2(w - s)$, oder $x = 2y$. (Vergleiche §. 55, Anm. 2).

2) Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind gleich groß, und gleiche Peripheriewinkel stehen auf gleichen Bogen.

Beweis. Peripheriewinkel auf gleichen Bogen sind (nach 1) die Hälften von Centriwinkeln auf gleichen Bogen, sind also gleich. Umgekehrt

sind Bogen, auf denen gleiche Peripheriewinkel, also auch gleiche Centriwinkel stehen, gleich groß (§. 63, 1).

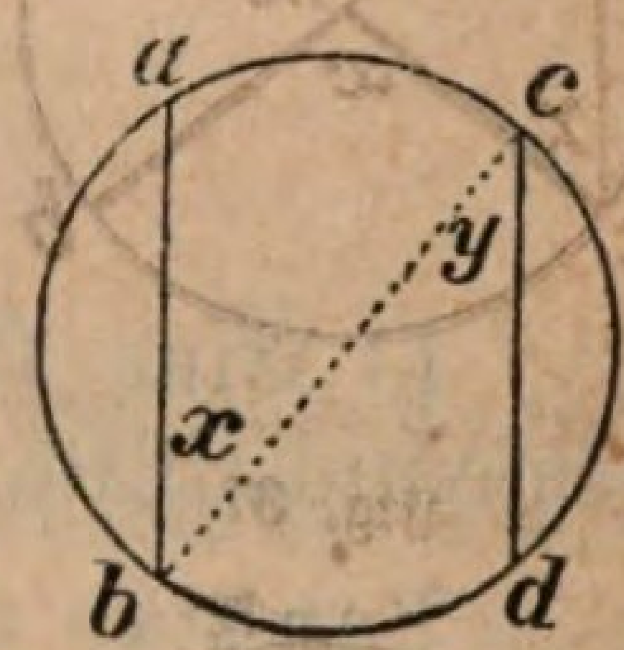
Anm. zu 2. Zu gleichen Peripheriewinkeln gehören auch gleiche Sehnen. Hingegen gehören nur dann zu gleichen Sehnen auch gleiche Peripheriewinkel, oder zum größeren Peripheriewinkel die größere Sehne, oder zur größeren Sehne der größere Peripheriewinkel, wenn keiner der betreffenden Peripheriewinkel größer als R ist. (Vergl. §. 63, 3 u. 4).

3) Der Peripheriewinkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Beweis. Der zugehörige Centriwinkel ist gleich 2R.

4) Zwischen zwei parallelen Sehnen liegen zwei gleiche Bogen. Umgekehrt sind zwei Sehnen parallel, wenn sie die Endpunkte von zwei gleichen Bogen in der Art verbinden, daß sie sich nicht schon innerhalb des Kreises schneiden.

Fig. 39.



Beweis. Ist ab || cd, so ist x = y,

folglich ac = bd.

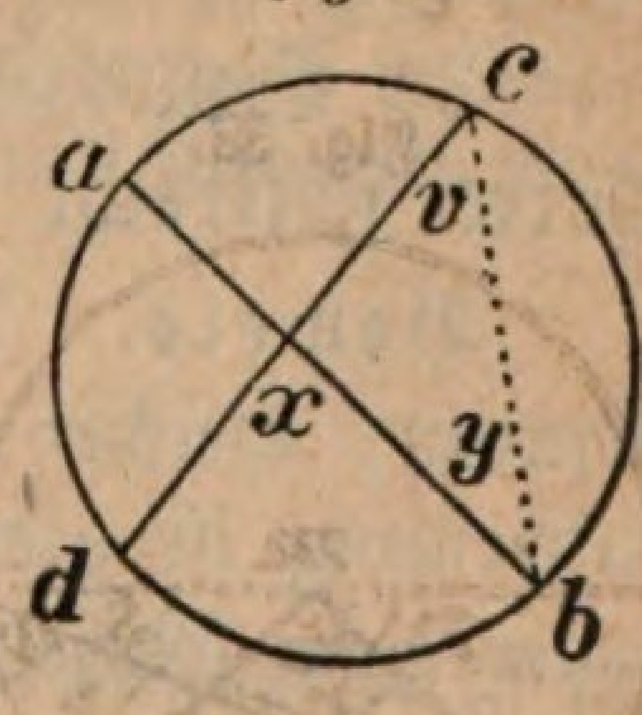
Ist umgekehrt ac = bd, so ist x = y,

folglich ab || cd.

§. 65. Lehrsätze.

1) Ein Sehnenwinkel ist gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel, die auf den zwischen den beiden Sehnen liegenden Bogen stehen.

Fig. 40.



Beh. x ist gleich der Summe der Peripheriewinkel auf den Bogen ac und bd.

Beweis. Es ist x = v + y (§. 19, 1), und es gehört zu v der Bogen bd, zu y der Bogen ac.

Anm. Der Satz findet seine Anwendung bei Winkelmeßinstrumenten, wenn der Scheitel des gemessenen Winkels nicht mit dem Mittelpunkte des Kreises übereinstimmt.

2) Ein Secantenwinkel ist gleich der Differenz der beiden Peripheriewinkel, die auf den zwischen den beiden Secanten liegenden Bogen stehen.

Beweis. Er wird ähnlich geführt, wie der Beweis zu 1. (Vergl. §. 55, Anm. 2).

§. 66. Lehrsatz.

Denkt man sich über einer gegebenen Linie als Grundlinie mehrere Dreiecke errichtet, die alle an der Spitze denselben Winkel x haben, so liegen alle diese Spitzen und die Endpunkte der Grundlinie in einer Kreislinie. Ist x = R, so ist die gegebene Grundlinie zugleich Durchmesser des Kreises.

Beweis. Man denke sich um eins dieser Dreiecke einen Kreis beschrieben (§. 38, 1). Fiele nun die Spitze eines der anderen Dreiecke nicht in die Peripherie, so könnte der Winkel an dieser Spitze nicht gleich x sein (§. 65). — Der zweite Theil des Satzes folgt aus §. 64, 3 und 2.

B. Von den Tangenten.

§. 67. Lehrsätze.

1) Eine Gerade, welche mit der Peripherie zwei Punkte gemeinschaftlich hat, schneidet den Kreis.

Beweis. Die Verbindungslinie zweier Punkte der Peripherie ist die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Spitze im Centrum liegt. Die Mitte der Basis liegt aber der Spitze (dem Centrum) näher, als die beiden Endpunkte derselben; sie liegt folglich innerhalb des Kreises, so daß der Kreis von der Basis geschnitten werden muß (§. 24).

2) Eine Tangente berührt den Kreis nur in einem Punkte.

Beweis. Er folgt aus 1.

3) Eine Gerade, welche auf einem Radius in der Peripherie senkrecht steht, ist eine Tangente.

Beweis. Der Scheitel des rechten Winkels ist derjenige Punkt der Geraden, welcher dem Mittelpunkte am nächsten liegt (§. 24), und seine Entfernung ist gleich dem Radius. Jeder andere Punkt der Geraden liegt weiter vom Mittelpunkte entfernt, liegt folglich außerhalb des Kreises.

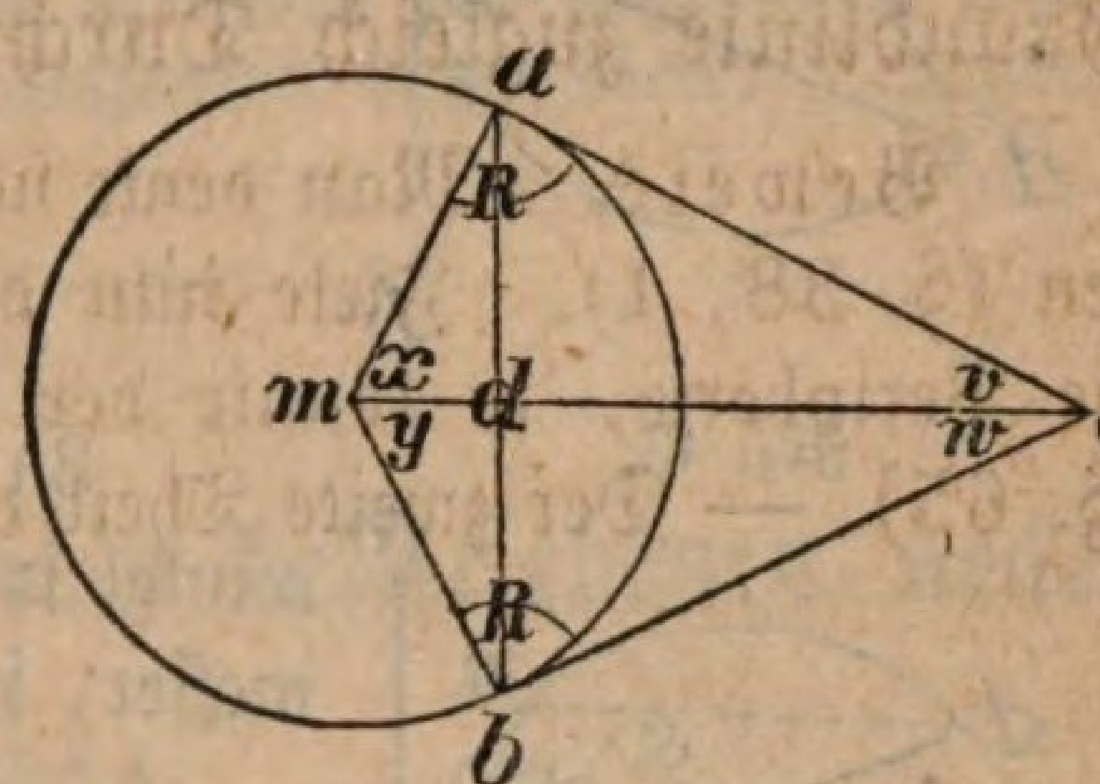
4) Eine Tangente steht auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius senkrecht.

Beweis. Der nach dem Berührungspunkte gezogene Radius ist die kürzeste Verbindung des Mittelpunktes mit der Geraden, da die übrigen Punkte derselben außerhalb des Kreises liegen. Er steht folglich auf der Tangente senkrecht. (§. 24).

§. 68. Lehrsatz.

Wenn man zwei nicht parallele Tangenten bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert, so sind die Stücke zwischen dem Durchschnittspunkte und den Berührungspunkten gleich groß.

Fig. 41.



Vor. $\sphericalangle$ mac = $\sphericalangle$ mbc = R.

Beh. ac = bc.

Beweis. Verbindet man m und c durch die Linie mc, so ist ma = mb, mc = mc, R = R, folglich $\triangle$ mac $\cong$ $\triangle$ mbc, daher ac = bc.

Außerdem ergiebt sich, daß x = y, v = w ist.

§. 69. Zusatz.

Aus vorigem §. ergeben sich folgende Sätze:

1) Die Halbirungslinie des Winkels, den zwei sich schneidende Tangenten bilden (des Tangentenwinkels), geht durch den Mittelpunkt des Kreises, halbirt hier den zugehörigen Centriwinkel, halbirt außerdem die Sehne, welche die Berührungspunkte verbindet, und steht auf derselben senkrecht (§. 36, Anm.)

2) Zu gleichen Centriwinkeln (oder Bogen) gehören gleiche Tangentenpaare und gleiche Tangentenwinkel, und ebenso findet das Umgekehrte statt.

3) Der Tangentenwinkel ist das Supplement des zugehörigen Centriwinkels.

Anm. zu 3. Der Tangentenwinkel acb (Fig. 41) würde als Centriwinkel auf einem Bogen stehen, welcher den (kleineren) Bogen ab zum halben Umfang ergänzt, daher als Peripheriewinkel auf einem doppelt so großen Bogen, also auf der Differenz zwischen dem größeren und kleineren Bogen ab. (Vergl. §. 65, 2).

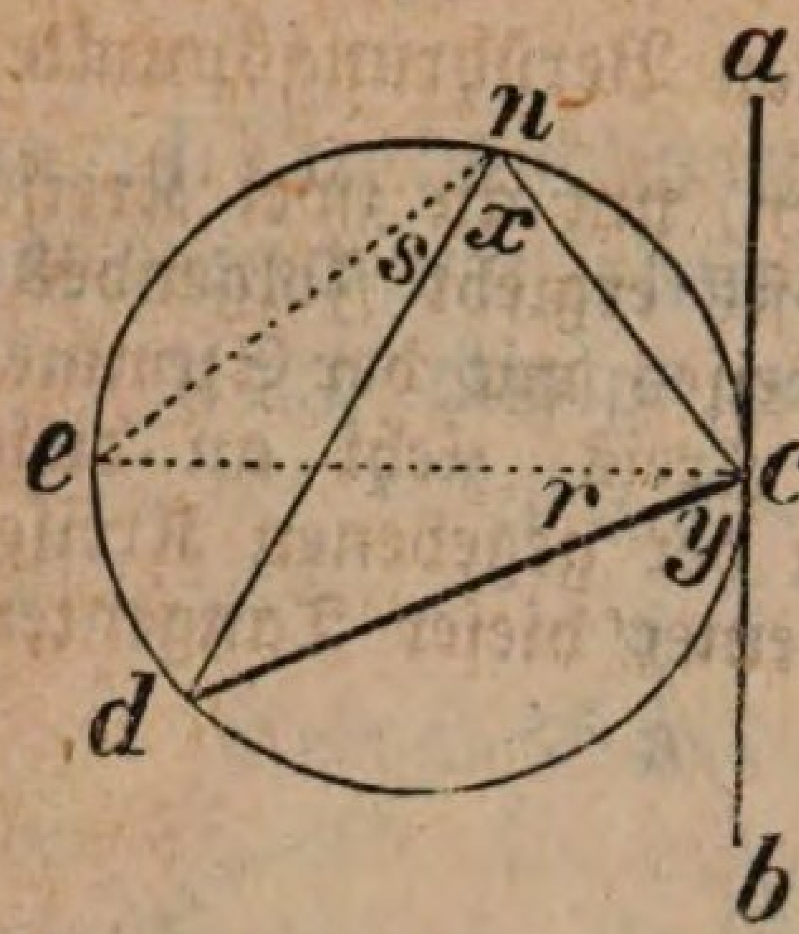
§. 70. Lehrsatz.

Der Winkel, der eine Tangente am Berührungspunkte mit einer beliebigen Sehne bildet, ist gleich dem Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Abschnitte.

Beweis. Der Winkel y, den die Tangente ab mit der Sehne bildet, kann ein rechter, spitzer, oder stumpfer sein.

1) Ist y = R, so ist die Sehne Durchmesser, folglich der Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Abschnitte ebenfalls gleich R.

Fig. 42.



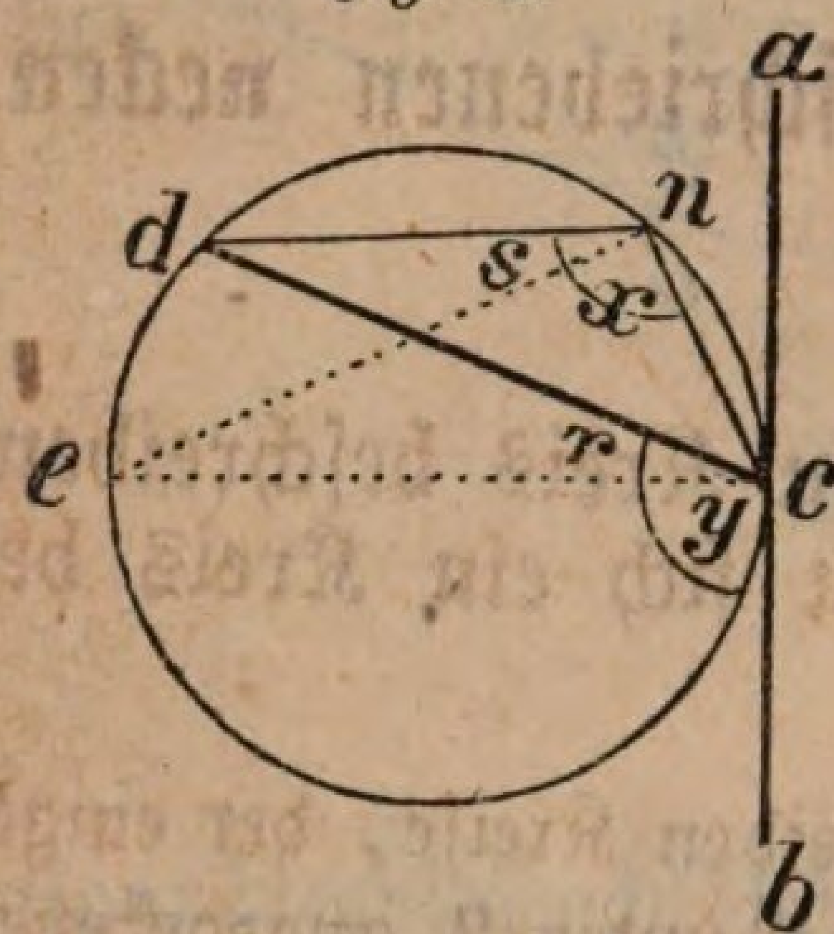
2) Ist $y < R$ (Fig. 42), x der Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Abschnitte, ce ein Durchmesser, so ist

$$y = R - r$$
$$x = R - s.$$

Nun ist $r = s$ (§. 64, 2), daher auch

$$y = x.$$

Fig. 43.



3) Ist $y > R$ (Fig. 43), x der Peripheriewinkel im gegenüberliegenden Abschnitte, ce ein Durchmesser, so ist

$$y = R + r,$$
$$x = R + s.$$

Nun ist $r = s$ (§. 64, 2), daher auch

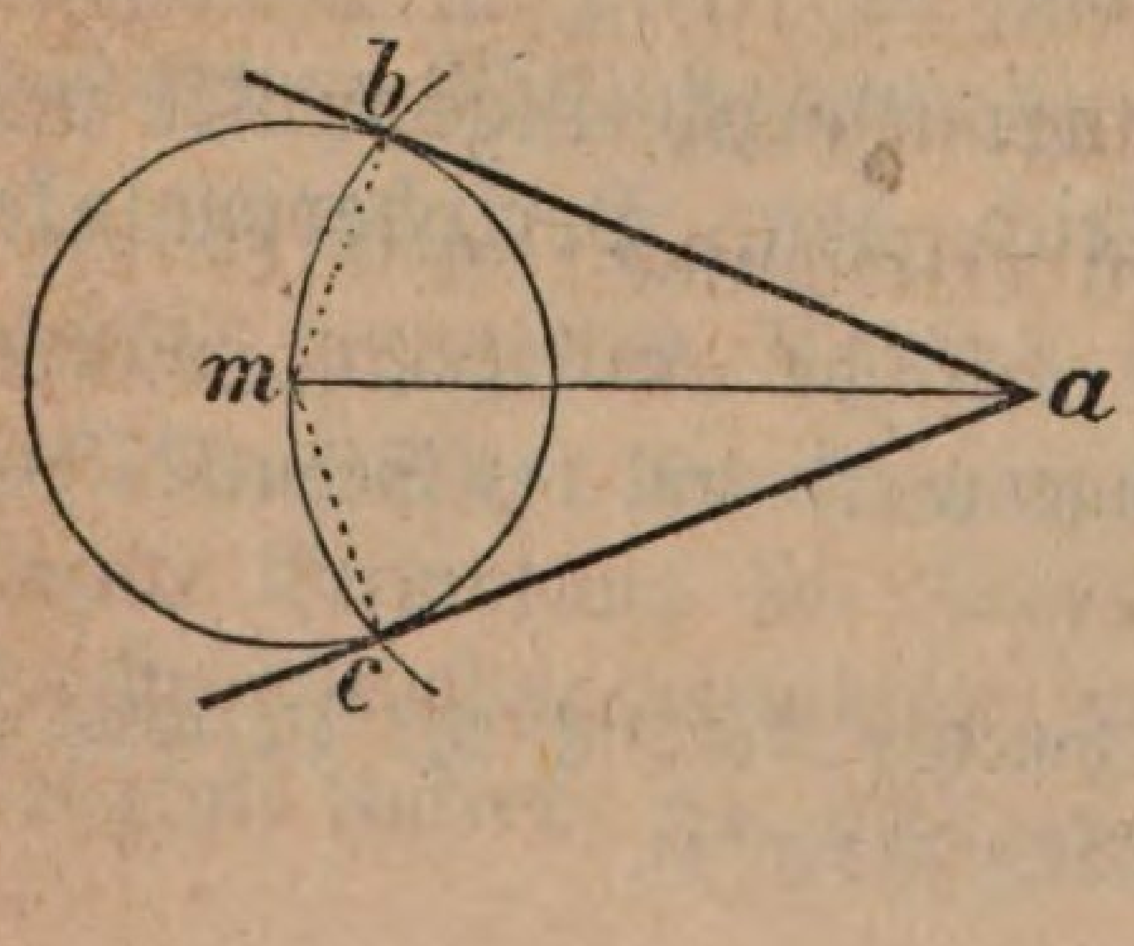
$$y = x.$$

§. 71. Zusatz.

Aus den §§. 65, 69, 70 ergiebt sich, daß man jeden Winkel, dessen Schenkel einen Kreis schneiden oder berühren, in einen Peripheriewinkel verwandeln kann. Ist nun ein Bogen gleich dem n^{ten} Theile der Peripherie, so ist der auf ihm stehende Centriwinkel gleich dem n^{ten} Theile von 360°, der Peripheriewinkel halb so groß. Die Größe eines jeden Winkels, dessen Schenkel einen Kreis schneiden oder berühren, ist daher bekannt, wenn man weiß, welche Theile der Peripherie von den Schenkeln abgeschnitten werden.

§. 72. Aufgabe.

Fig. 44.



Aus einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente an denselben zu ziehen.

Analysis. Ist ab die gesuchte Tangente (Fig. 44), folglich $\sphericalangle$ mba = R, so muß ein Halbkreis, den man über ma als Durchmesser beschreibt, durch b gehen.

Construction. Man beschreibe

über ma als Durchmesser einen Kreis. Die Punkte b und c, in welchen dieser den gegebenen schneidet (§. 38, 7), sind die gesuchten Berührungspunkte.

Anm. Die gegebene Auflösung kann benutzt werden, um an zwei Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen. Die Analysis ergiebt Folgendes: Beschreibt man aus dem Mittelpunkte des größeren Kreises mit der Summe, ferner mit der Differenz der beiden Radien je einen Kreis, zieht an diese Kreise Tangenten aus dem Mittelpunkte des kleineren der gegebenen Kreise, so ist jede der gesuchten gemeinschaftlichen Tangenten einer dieser Tangenten parallel.

C. Von den um und in den Kreis beschriebenen necken.

§. 73. Lehrsätze.

1) Um und in jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

2) Um und in jedes reguläre neck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis zu 1. Er folgt aus §. 38. Die beiden Kreise, der eingeschriebene und der umschriebene, sind excentrisch, den unter 2 angegebenen Fall ausgenommen.

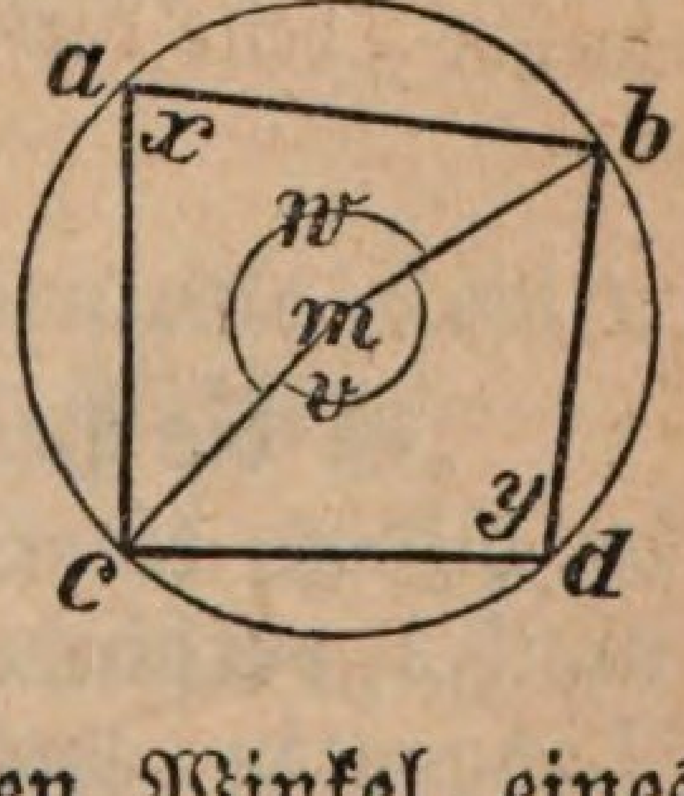
Beweis zu 2. Er folgt aus §. 58. Die beiden Kreise sind concentrisch.

§. 74. Lehrsätze.

1) Die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel eines Vierecks im Kreise ist gleich 2R.

Beh. $x + y = 2R$.

Fig. 45.



Beweis. Verbindet man die Ecken b und c, an welchen die Winkel x und y nicht liegen, mit dem Mittelpunkte m, so ist (nach §. 64) $v = 2x$, $w = 2y$, folglich $2x + 2y = 4R$, $x + y = 2R$. Der Beweis folgt auch unmittelbar aus §. 71, ferner aus §. 70, wenn man die Diagonale cb und an b eine Tangente zieht.

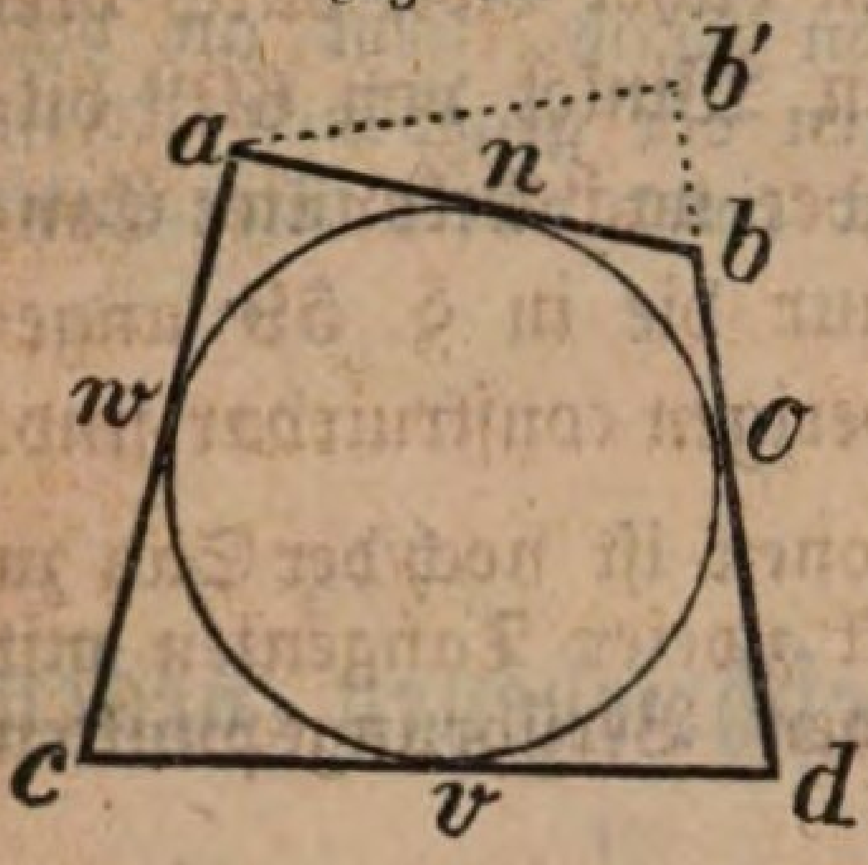
2) Ist die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel eines Vierecks gleich 2R, so läßt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

Beweis. Es sei (Fig. 45) $x + y = 2R$. Beschreibt man nun um $\triangle$ bcd einen Kreis, so muß dieser auch durch a gehen, weil sonst nicht x das Supplement von y sein könnte (§. 65).

§. 75. Lehrsätze.

1) Die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks um den Kreis ist gleich der Summe der beiden anderen.

Fig. 46.



Vor. ab, bd, dc und ca sind Tangenten.

Beh. ab + cd = ac + bd.

Beweis. Sind n, o, v, w die vier Berührungspunkte, so ist (§. 68):

$$an = aw,\ bn = bo,\ dv = do,\ cv = cw,$$

also $an + bn + dv + cv = aw + cw + bo + do$,

oder $ab + cd = ac + bd$.

2) Ist die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks gleich der Summe der beiden anderen, so läßt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

Beweis. Es sei (Fig. 46) $ab' + cd = ac + b'd$. Man beschreibe nun einen Kreis, der die Seiten ac, cd, b'd berührt, und nehme an, daß er die Seite ab' nicht berühre. Alsdann kann man aus a eine Tangente an den Kreis gelegt und sie verlängert denken, bis sie die Seite b'd oder deren Verlängerung im Punkte b schneidet.

Alsdann ist $ab + cd = ac + bd$ (nach 1);
es ist aber auch $ab' + cd = ac + b'd$ (nach der Voraussetzung).

Subtrahirt man nun die obere Gleichung von der untern, so erhält man:

$$ab' - ab = b'd - bd = \mp bb'.\text{*)}$$

Diese Gleichung kann aber nicht richtig sein (§. 25), und folglich ist die Annahme, daß der Kreis die Seite ab' nicht berühre, falsch. Die Linien ab' und ab fallen daher zusammen.

§. 76. Lehrsatz.

Ist die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile getheilt, so bilden die Sehnen, welche die aufeinanderfolgenden Theilpunkte verbinden, ein reguläres neck im Kreise, hingegen die Tangenten, welche durch diese Theilpunkte gehen, ein reguläres neck um den Kreis.

Beweis. Es folgt aus §§. 63 (3), 64 (2), 69 (2).

---

*) Das doppelte Vorzeichen ist gesetzt, weil der Punkt b auch in der Verlängerung von db' liegen könnte.

§. 77. Zusatz.

Die Peripherie wird dadurch in n gleiche Theile getheilt, daß man die um das Centrum herumliegenden 4R in n gleiche Theile theilt. Durch zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser erhält man daher vier, durch drei Durchmesser, von denen jeder mit dem folgenden einen Winkel von 60^0 bildet, sechs gleiche Theile. Diese Theile lassen sich wieder nach bekannter Construction halbiren. Es ergiebt sich hieraus, daß nur die in §. 59 angegebenen Gruppen von regulären necken nach dem Bisherigen construirbar sind.

Anm. Als Hülfsmittel bei derartigen Constructionen ist noch der Satz zu benutzen, daß die Linie, welche den Durchschnittspunkt zweier Tangenten mit dem Mittelpunkte verbindet, den Bogen zwischen den Berührungspunkten halbirt (§. 69, 1).

§. 78. Lehrsatz.

Die Seite des regulären Sechsecks im Kreise ist gleich dem Radius.

Beweis. Jedes reguläre Sechseck läßt sich in sechs gleichschenklige Dreiecke zerlegen, deren Spitzen im Centrum liegen. Da nun der Centriwinkel 60^0 beträgt, so sind die Dreiecke gleichseitig, und jede Seite ist also gleich dem Radius.

D. Von den Beziehungen zwischen zwei Kreisen.

§. 79. Lehrsätze.

1) Zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten.

Beweis. Vergleiche §. 38, 6 und 7.

2) Schneiden sich zwei Kreise, so ist die Centrale kleiner als die Summe und größer als die Differenz der Radien.

Beweis. Sind m und n die Mittelpunkte, a und b die Durchschnittspunkte, so ist mindestens eine der beiden Linien man und mbn gebrochen. Es sei dies die Linie man. Im Dreiecke man ist alsdann $mn < ma + na$, $mn > \mp (ma - na)$.

3) Zwei Kreise berühren sich in einem Punkte, und dieser Punkt liegt in der Centrale, oder in ihrer Verlängerung.

Beweis. Berühren sich die Kreise auswendig, so kann die Centrale nicht kleiner als die Summe der beiden Radien sein. Dies würde aber der

Fall sein müssen (§. 25), wenn ein Berührungspunkt außerhalb der Centrale liegen könnte. Es giebt daher nur einen Berührungspunkt, und dieser liegt innerhalb der Centrale. — Berühren sich die Kreise inwendig, so kann die Summe der Centrale und des kleineren Radius nicht größer als der größere Radius sein. Hieraus folgt in ähnlicher Weise, wie vorher, daß es nur einen Berührungspunkt giebt, und daß dieser in der verlängerten Centrale liegt.

4) Berühren sich zwei Kreise auswendig, so ist die Centrale gleich der Summe, berühren sie sich inwendig, gleich der Differenz der beiden Radien.

Beweis. Er folgt aus 3.

5) Liegt ein Kreis völlig außerhalb oder innerhalb eines anderen, ohne ihn zu berühren, so ist im ersteren Falle die Centrale größer als die Summe, im anderen kleiner als die Differenz der beiden Radien.

Beweis. Er folgt aus 4.

6) Ein Kreis wird von einem anderen umschlossen, ohne ihn zu berühren, wenn die Centrale kleiner als die Differenz der beiden Radien ist; er berührt den anderen inwendig, wenn die Centrale gleich der Differenz der Radien ist; er schneidet ihn, wenn die Centrale größer als die Differenz und kleiner als die Summe der Radien ist; er berührt ihn auswendig, wenn die Centrale gleich der Summe der Radien ist; er liegt völlig außerhalb des anderen, ohne ihn zu berühren, wenn die Centrale größer als die Summe der Radien ist.

Beweis. Er ergiebt sich indirekt aus den vorangehenden Sätzen.

Anm. zu 6. Vergleiche §. 40, V, Anm.

§. 80 Lehrsätze.

1) Berühren sich zwei Kreise inwendig oder auswendig, so läßt sich durch den Berührungspunkt eine gemeinschaftliche Tangente legen.

Beweis. Eine Linie, welche im Berührungspunkte auf der Centrale oder ihrer Verlängerung senkrecht steht, ist für jeden der beiden Kreise eine Tangente.

2) Die Centrale halbirt die gemeinschaftliche Sehne zweier sich schneidenden Kreise und steht auf derselben senkrecht.

Beweis. Er folgt aus §. 36, 1.

Uebungssätze und Aufgaben.

1) Stehen in einem Kreise zwei Sehnen senkrecht auf einander, so ist jedesmal die Summe der beiden Bogen, auf welchen je zwei Scheitelwinkel stehen, gleich der halben Peripherie.

2) Stehen zwei Sehnen zweier Kreise auf der Centrale senkrecht, so liegen die vier Endpunkte der Sehnen in einer Kreislinie.

3) Zieht man an zwei sich berührende Kreise zwei parallele Tangenten, so liegen die drei Berührungspunkte in gerader Linie.

4) Wenn der Winkel, den zwei verlängerte Sehnen bilden, von einem verlängerten Durchmesser halbirt wird, so sind sowohl die Sehnen als auch ihre Verlängerungen bis zum Durchschnittspunkte einander gleich.

5) Bei zwei concentrischen Kreisen ist diejenige Verbindungslinie der beiden Peripherieen die kürzeste, deren Verlängerung den Mittelpunkt trifft.

6) Wird eine Gerade, welche mit einem ihrer Endpunkte im Umfange eines Kreises liegt, von einem Durchmesser desselben unter einem rechten Winkel halbirt, so liegt auch ihr anderer Endpunkt im Umfange.

7) Errichtet man aus zwei Punkten einer Sehne, welche gleichweit von den Endpunkten derselben entfernt sind, Senkrechte bis zu dem der Sehne zugehörigen Bogen, so sind diese Senkrechten einander gleich.

8) Wenn in einem rechtwinkligen Dreiecke die Hypotenuse doppelt so groß als die eine Cathete ist, so verhalten sich die Winkel wie 1 : 2 : 3.

9) In einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe aus der doppelten Hypotenuse und dem Durchmesser des eingeschriebenen Kreises dem Umfange des Dreiecks gleich.

10) Verlängert man zwei Seiten eines Dreiecks und beschreibt zwischen den Verlängerungen und der dritten Seite einen Kreis, so ist jede der beiden Tangenten, welche aus einer Dreiecksseite und deren Verlängerung bestehen, gleich dem halben Umfange des Dreiecks.

11) Die nicht parallelen Seiten eines Trapezes im Kreise sind gleich groß.

12) Beschreibt man zwei gleiche Kreise so, daß jeder durch den Mittelpunkt des andern geht, und zieht in einem derselben eine beliebige Menge von Sehnen parallel mit der Centrale beider Kreise, so wird jede derselben durch die Peripherie des andern Kreises in zwei Stücke getheilt, von denen das eine gleich dem Kreishalbmesser ist.

13) Zieht man aus einem beliebigen Punkte a außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an denselben und fällt auf die eine derselben eine Senkrechte aus dem Berührungspunkte der andern, so ist das Stück dieser Senkrechten, welches zwischen jenem Berührungspunkte und der Verbindungslinie des Mittelpunktes mit dem Punkte a liegt, gleich dem Radius.

14) Verbindet man die Endpunkte der drei Höhen eines Dreiecks, so werden die von jenen Verbindungslinien gebildeten Winkel durch die Höhen halbirt.

15) Zeichnet man in einem Kreise ein Dreieck und fällt aus einem beliebigen Punkte der Peripherie Senkrechte auf alle drei Seiten, so liegen die drei Fußpunkte dieser Senkrechten in gerader Linie.

16) Zu einem gegebenen Bogen den Mittelpunkt zu finden.

17) An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, daß sie eine gegebene Linie unter einem bestimmten Winkel schneidet.

18) An einen Kreis eine Tangente zu ziehen, welche einer gegebenen Linie parallel ist.

19) An einen Kreis zwei Tangenten zu ziehen, welche sich unter einem gegebenen Winkel schneiden.

20) Durch einen innerhalb eines Kreises gegebenen Punkt eine Sehne so zu ziehen, daß ihr Abstand vom Mittelpunkte eine bestimmte Größe hat.

21) Dasselbe, wenn der gegebene Punkt außerhalb des Kreises liegt.

22) Aus einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Linie so durch den Kreis zu ziehen, daß die entstehende Sehne eine gegebene Länge hat.

23) Aus einem Punkte c außerhalb eines Kreises eine Linie so durch den Kreis zu ziehen, daß die entstehende Sehne $ab = bc$ wird.

24) Durch einen zwischen zwei concentrischen oder excentrischen Kreisen liegenden Punkt eine Gerade von einer Peripherie zur andern zu ziehen, so daß sie in diesem Punkte halbirt wird.

25) Zu zwei gegebenen Punkten a und b einen dritten c mit dem Zirkel zu finden, so daß $ab = bc$, $\sphericalangle\, abc = 2R$ ist.

26) Ein Dreieck aus einer Seite, der zugehörigen Höhe und dem Gegenwinkel der Seite zu construiren.

27) Um einen gegebenen Kreis ein Viereck aus einer Seite, einem gegenüberliegenden und einem anliegenden Winkel zu construiren.

28) Aus drei Seiten und einem Winkel ein Viereck zu construiren, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt.

29) In ein gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges zu construiren, dessen Seiten senkrecht auf den Seiten des ersteren stehen.

30) Ein Kreis berührt eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkte. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes zu bestimmen.

31) Dasselbe, wenn ein Kreis von gegebenem Radius eine gegebene Gerade berührt.

32) Dasselbe, wenn ein Kreis die Schenkel eines gegebenen Winkels berührt.

33) Dasselbe, wenn ein Kreis wei gegebene Parallelen berührt.

34) Den Mittelpunkt eines Kreises zu bestimmen, welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührt.

35) Aus einem gegebenen Punkte einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen Kreis berührt.

36) Ein Kreis von gegebenem Radius berührt einen gegebenen Kreis (inwendig oder auswendig). Den geometrischen Ort des Mittelpunktes zu bestimmen.

37) Einen Kreis zu construiren, der zwei andere, und zwar den einen in einem gegebenen Punkte berührt.

38) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher einen gegebenen andern Kreis berührt und durch einen innerhalb oder außerhalb desselben gegebenen Punkt geht.

39) Mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben, welcher zwei andere gegebene Kreise berührt.

40) Ein Dreieck zu construiren, wenn eine Ecke desselben, ferner der Mittelpunkt des eingeschriebenen und der des umschriebenen Kreises gegeben sind.

Neuntes Capitel.

Von der Gleichheit der ebenen Figuren.

§. 81. Erklärung.

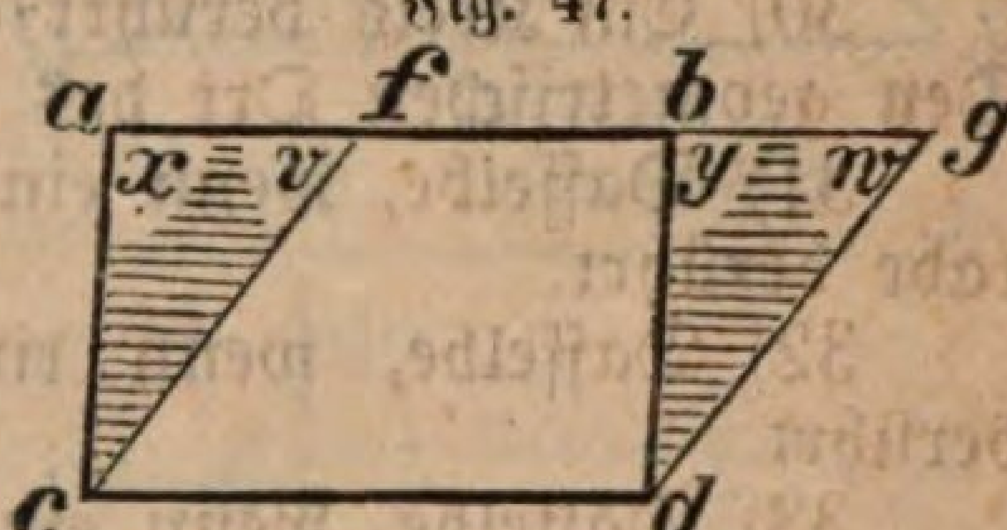
Zwei Figuren sind gleich oder haben gleiche Größe, wenn eine dritte beliebig angenommene Figur in beiden gleich oft enthalten ist.

Unzweifelhaft gleich sind daher alle congruenten Figuren, ferner diejenigen, welche bei veränderter Lage einzelner Theile congruent sein würden, ferner diejenigen, welche in solchen Beziehungen zu andern gleichen Figuren stehen, daß sie nach den früher aufgestellten Grundsätzen (Einleitung §. IV) ebenfalls gleich sein müssen.

§. 82. Lehrsätze.

1) Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind gleich.

Fig. 47.



Beweis. Alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe lassen sich so aufeinandergelegt denken, daß sie zwischen denselben zwei Parallelen liegen, und ihre Grundlinien sich decken. Sind nun abcd und fgcd zwei Parallelogramme dieser Art, und haben die Punkte f und g eine ganz beliebige Lage, so ist stets $\triangle$ afc $\cong \triangle$ bgd (ac = bd, x = y, v = w), und man erhält daher stets das eine Parallelogramm aus dem anderen, wenn man zuerst das eine Dreieck hinzufügt, dann das zweite wegnimmt.

2) Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind gleich.

Beweis. Ein Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms von derselben Grundlinie und Höhe. Da nun alle Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe einander gleich sind, so sind es auch ihre Hälften, also alle Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

§. 83. Zusatz.

Aus den vorangehenden §§. ergeben sich noch einige Folgerungen, welche benutzt werden können, wenn eine gegebene Figur in eine andere von vorgeschriebener Form verwandelt, oder in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zerlegt werden soll.

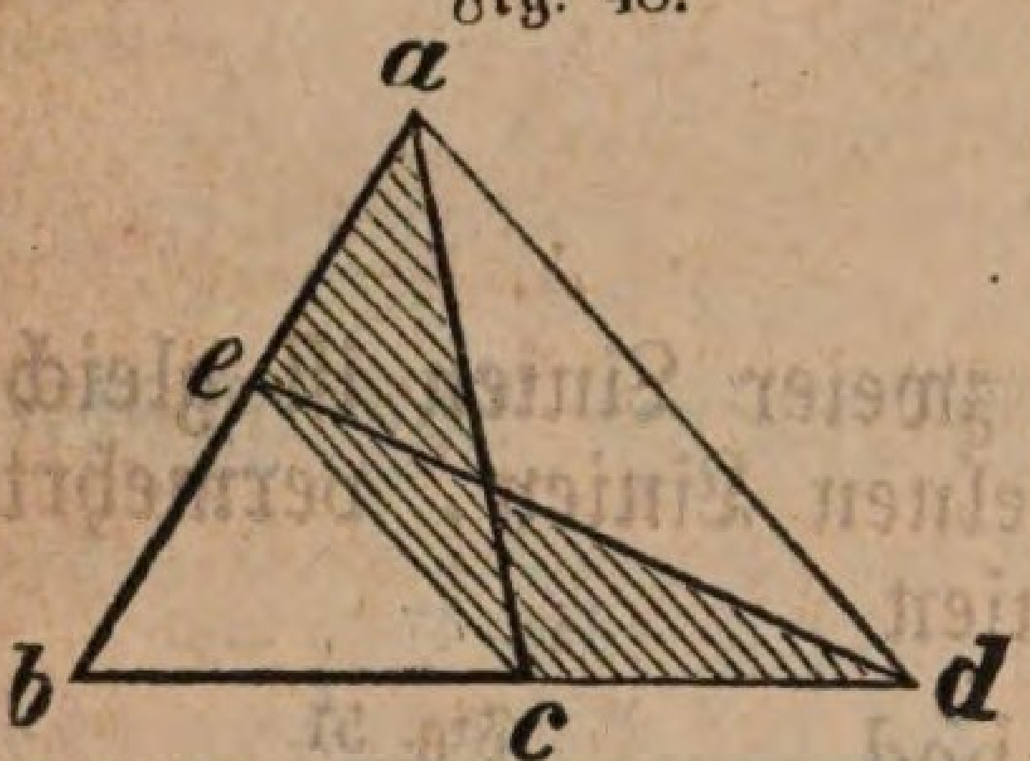
1) Haben zwei Parallelogramme A und B gleiche Höhe, hat aber A eine nmal größere Grundlinie als B, so ist auch A nmal größer als B, d. h. es läßt sich in n gleiche Theile zerlegen, von denen jeder gleich B ist. Dieselbe Beziehung findet statt, wenn die Grundlinien gleich, die Höhen aber verschieden sind. Das Gesagte gilt ferner auch für Dreiecke.

2) Zieht man durch die Spitze eines Dreiecks eine Gerade parallel mit der Grundlinie, so ist diese Parallele der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks, welches dieselbe Grundlinie und Größe wie ersteres hat.

§. 84. Aufgaben.

1) Das Dreieck abc (Fig. 48) in ein anderes gleich großes zu verwandeln, so daß bd eine Seite desselben ist, während die zweite in die Richtung von ba fällt.

Fig. 48.



Auflösung. Man verbinde d mit a, ziehe ce || da und verbinde endlich e mit d, so ist ebd das gesuchte Dreieck.

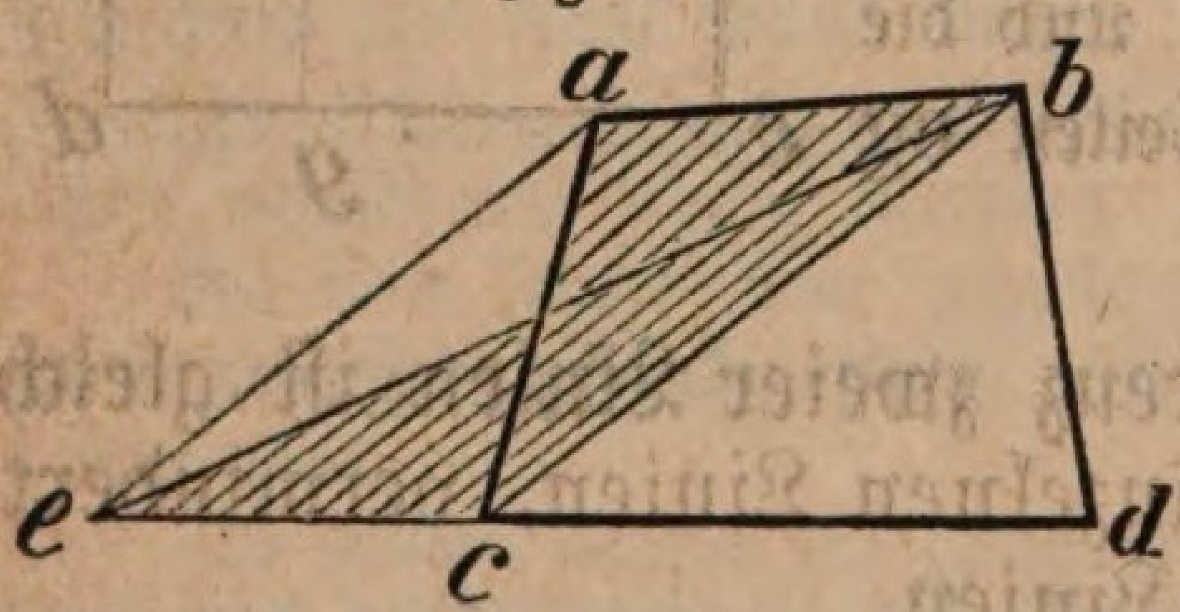
Beweis. Es ist △ ecd = △ eca (§. 83, 2), folglich

$$\triangle\ ebc + \triangle\ ecd = \triangle\ ebc + \triangle\ eca,$$

oder $\triangle\ ebd = \triangle\ abc$.

2) Das Viereck abcd (Fig. 49) in ein gleich großes Dreieck zu verwandeln, so daß bd die eine Seite desselben ist, während die zweite in die Richtung von dc fällt.

Fig. 49.



Auflösung. Man verbinde b mit c, verlängere dc über c hinaus, ziehe ae || bc und verbinde endlich b mit e, so ist bed das gesuchte Dreieck.

Beweis. Er wird geführt, wie der Beweis zu 1.

§. 85. Lehrsätze.

1) Ein Parallelogramm wird durch seine zwei Diagonalen in vier gleiche Dreiecke getheilt.

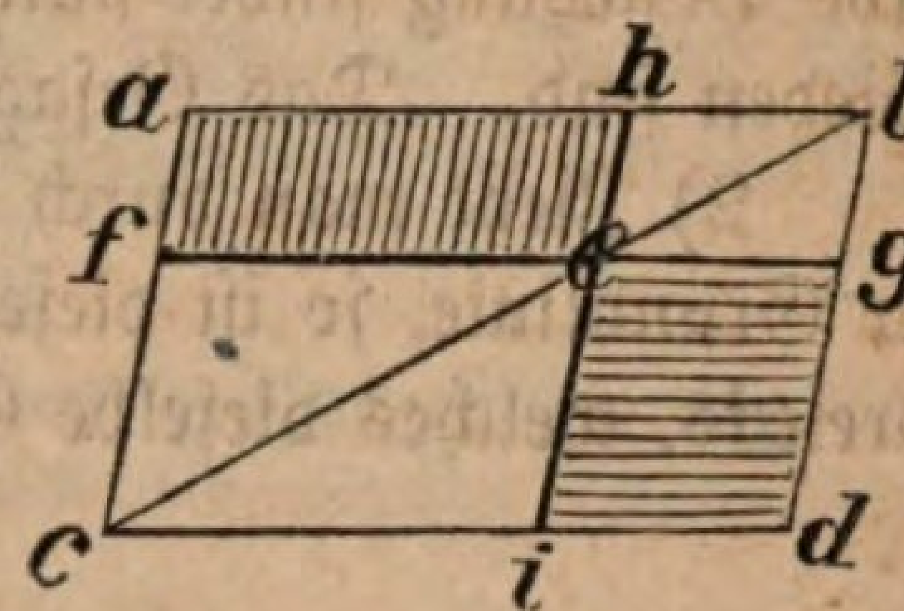
Beweis. Je zwei dieser Dreiecke sind entweder congruent, oder haben gleiche Grundlinien und gemeinschaftliche Höhe.

2) Zieht man durch einen beliebigen Punkt der einen Diagonale eines Parallelogramms zwei Linien den Seiten pa-

rallel, so erhält man vier Parallelogramme. Von diesen sind die zwei, welche von der Diagonale nicht getheilt werden, gleich groß.

Beh. ahfe = egid.

Fig. 50.



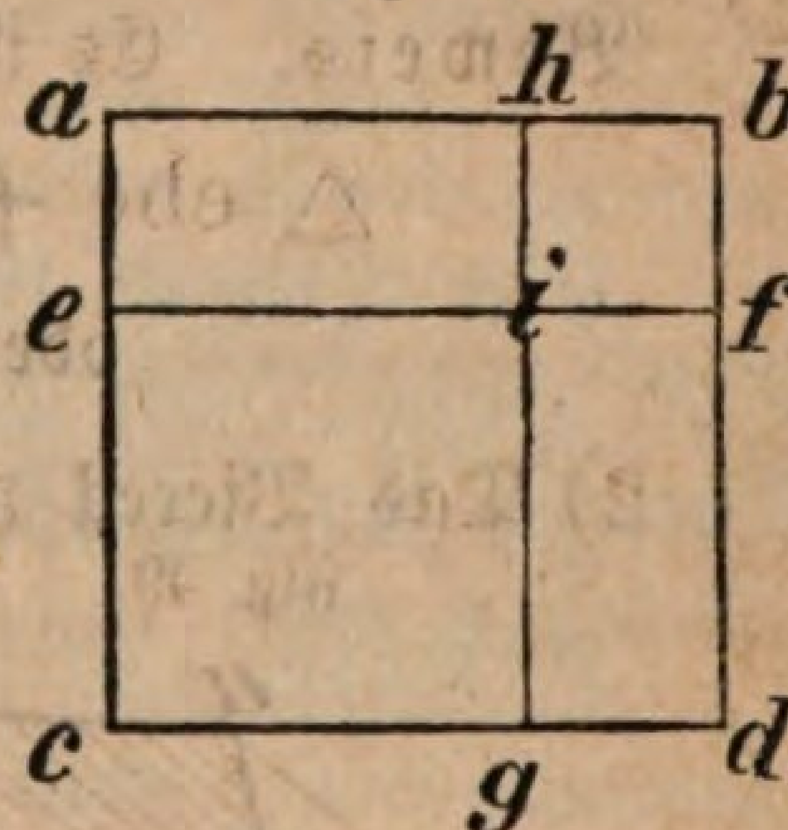
Beweis. Es ist △ abc = △ dcb,
ferner △ hbe = △ geb,
endlich △ fec = △ ice.
Es muß also auch ahfe = egid sein.

Anm. Diese beiden Parallelogramme nennt man Ergänzungen an der Diagonale.

§. 86. Lehrsätze.

1) Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien, vermehrt um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.

Fig. 51.



Beweis. Trägt man in dem Quadrate abcd (Fig. 51) auf den Seiten cd und ca die gleich großen Linien cg und ce ab, zieht ferner durch e und g Linien den Quadratseiten parallel, so zerfällt abcd, das Quadrat über (cg+gd), in die vier Theile eicg, hbif, ahei, ifgd. Von diesen ist eicg das Quadrat über cg, hbif das Quadrat über gd, und die beiden übrigen Rechtecke haben jedes die Seiten cg und gd.

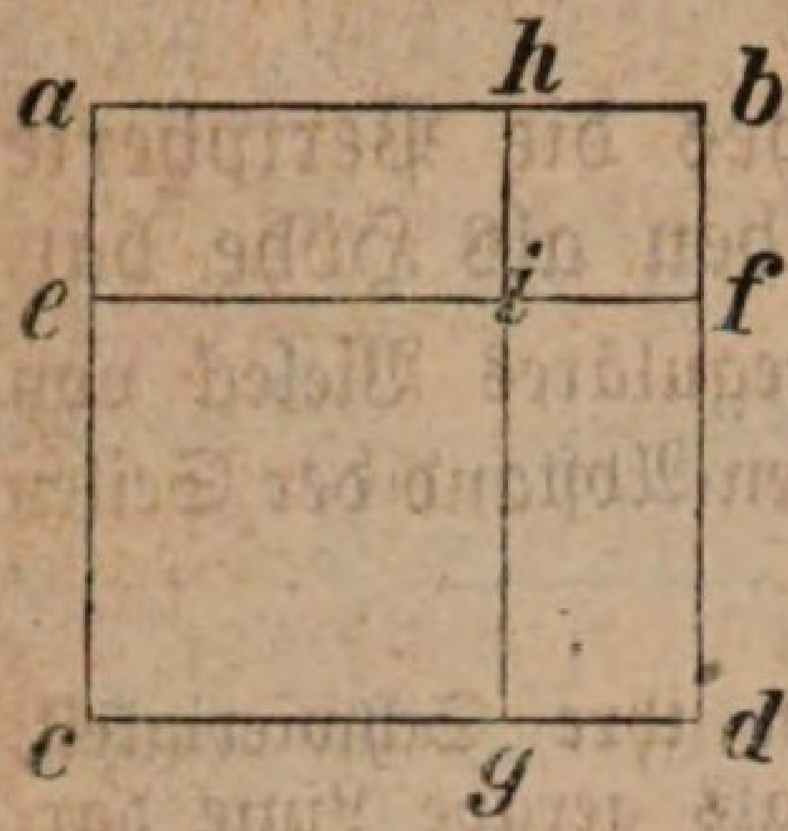
2) Das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist gleich der Summe der Quadrate über den einzelnen Linien, vermindert um das doppelte Rechteck aus beiden Linien.

Beweis. Es ist (Fig. 51) eicg das Quadrat über der Linie (cd—gd). Ferner ist eicg = abcd — abef — hbgd + hbif. Hiervon ist abcd das Quadrat über cd, hbif das Quadrat über gd, und die beiden zu subtrahirenden Rechtecke haben jedes die Seiten cd und gd.

3) Die Differenz zweier Quadrate ist gleich dem Rechtecke aus der Summe und der Differenz der beiden Quadratseiten.

Beweis. Subtrahirt man (Fig. 51) eicg, das Quadrat über cg, von abcd, dem Quadrate über cd, so bleibt als Rest abef + itgd. Setzt

Fig. 52.



man diese beiden Rechtecke mit den gleichen Seiten bf und if an einander, so erhält man ein Rechteck aus den Seiten (cd + cg) und (cd—cg).

Anm. Bezeichnet man ein Rechteck, dessen aneinanderstoßende Seiten M und N sind, durch M.N, die Quadrate über den Linien M und N durch M^2 und N^2, so lassen sich obige Sätze durch folgende Gleichungen ausdrücken:

1) $(M + N)^2 = M^2 + 2.M.N + N^2$;

2) $(M - N)^2 = M^2 - 2.M.N + N^2$;

3) $M^2 - N^2 = (M + N).(M - N)$.

Hierbei darf jedoch nicht übersehen werden, daß diese einzelnen Ausdrücke zwar die Form von Produkten haben, aber nicht Produkte sind, sondern Figuren bezeichnen.

Aehnliche Gleichungen, deren geometrische Bedeutung und Richtigkeit leicht nachzuweisen ist, sind:

4) $(M + N).H = M.H + N.H$;

5) $(M - N).H = M.H - N.H$.

§. 87. Lehrsatz.

Ein Trapez ist gleich einem Parallelogramme, welches dieselbe Höhe, wie das Trapez, und zur Grundlinie die halbe Summe der parallelen Seiten des Trapezes hat.

Beweis. Er folgt unmittelbar aus §. 51.

§. 88. Lehrsatz.

Ein reguläres neck ist gleich einem Dreiecke, welches den Umfang des necks als Grundlinie, den senkrechten Abstand der necksseiten vom Mittelpunkte als Höhe hat.

Beweis. Ein reguläres neck läßt sich durch Verbindung seines Mittelpunktes mit den Ecken in n congruente Dreiecke zerlegen. Die Summe dieser n Dreiecke verwandelt man in ein einziges Dreieck, indem man die Grundlinie eines derselben nmal größer macht, während die Höhe unverändert bleibt. Man erhält dabei den Umfang der Figur als Grundlinie für das gesuchte Dreieck.

§. 89. Lehrsatz.

Ein Kreis ist gleich einem Dreiecke, welches die Peripherie des Kreises als Grundlinie, den Radius desselben als Höhe hat.

Beweis. Betrachtet man den Kreis als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten, seinen Radius als den senkrechten Abstand der Seiten vom Mittelpunkte, so folgt der Satz aus §. 88.

Anm. Die Benutzung dieses Satzes findet darin ihre Schwierigkeit, daß man kein Mittel hat, um die Peripherie genau als gerade Linie darzustellen.

Uebungssätze und Aufgaben.

1) Verbindet man in einem Trapeze die Mittelpunkte der parallelen Seiten, so wird dasselbe durch die Verbindungslinie halbirt.

2) Wenn man in einem Dreiecke die Halbirungspunkte zweier Seiten verbindet und ferner aus diesen Punkten zwei beliebige Parallelen nach der dritten Seite zieht, so entsteht ein Parallelogramm, welches halb so groß als das Dreieck ist.

3) Zieht man in einem Trapeze aus dem Halbirungspunkte einer der nicht parallelen Seiten Linien nach den Endpunkten der andern, so entsteht ein Dreieck, welches gleich der Hälfte des Trapezes ist.

4) Halbirt man zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierecks und verbindet die Halbirungspunkte einer jeden mit den Endpunkten der andern, so entstehen zwei Dreiecke, die zusammen so groß sind als das Viereck.

5) Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, und die von denselben eingeschlossenen Winkel zusammen 2R betragen.

6) Das aus zwei Seiten eines Dreiecks und dem eingeschlossenen Winkel construirte Parallelogramm ist eben so groß als das Rechteck, welches sich aus der dritten Dreiecksseite und der zugehörigen Höhe construiren läßt.

7) Liegen die drei Ecken eines Dreiecks in den Seiten eines Parallelogramms, so ist das Dreieck kleiner als die Hälfte des Parallelogramms.

8) Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie in zwei Seiten übereinstimmen, und wenn ferner die dritte Seite des einen doppelt so groß ist als die Gerade, welche die Mitte der dritten Seite des andern mit der Gegenecke verbindet.

9) Schneidet man aus zwei gegenüberliegenden Ecken eines Parallelogramms gleiche Stücke auf den vier Seiten so ab, daß je zwei, die auf parallelen Seiten genommen werden, gleich sind, und verbindet diese vier Durchschnittspunkte, so ist das so entstandene Parallelogramm gleich dem Parallelogramme, welches entsteht, wenn man dieselben Stücke auf denselben Seiten aus den beiden andern gegenüberliegenden Ecken abschneidet.

10) Wenn zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Spitze haben, und ihre Grundlinien gleich und auch parallel sind, so ist die algebraische Summe ihrer Flächen halb so groß, als das durch die Grundlinien bestimmte Parallelogramm.

11) Wenn man in einem Trapeze die Halbirungspunkte der beiden nicht parallelen Seiten unter einander, ferner einen beliebigen Punkt der so erhaltenen Geraden mit den vier Ecken der Figur verbindet, so ist die Summe von zwei gegenüberliegenden Dreiecken gleich der Summe der beiden andern

12) Fällt man aus einem beliebigen Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks drei Senkrechte auf die drei Seiten, so ist die Summe dieser Senkrechten gleich der Höhe des Dreiecks.

13) Die drei Linien, welche die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der gegenüberstehenden Seiten verbinden, schneiden sich in einem Punkte.

14) Ein beliebiges Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

15) Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel zu verwandeln.

16) Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, zu welchem die Grundlinie und ein derselben anliegender Winkel gegeben sind.

17) Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges mit gegebener Grundlinie zu verwandeln.

18) Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichschenkliges mit gegebener Höhe zu verwandeln.

19) Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, dessen vier Seiten eine bestimmte Größe haben.

20) Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, dessen Höhe und Umfang gegeben sind.

21) Ein Vieleck in ein Parallelogramm von bestimmtem Umfange zu verwandeln.

22) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einer Ecke ausgehen.

23) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einem Punkte in der einen Seite ausgehen.

24) Ein Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen, so daß die Theilungslinien von einem Punkte innerhalb des Dreiecks ausgehen.

25) Ein Parallelogramm durch eine gerade Linie zu halbiren, welche durch einen innerhalb oder außerhalb gegebenen Punkt geht.

Zehntes Capitel.

Von der Ausmessung der geraden Linien und der ebenen Figuren.

§. 90. Erklärung.

Eine Linie (Ebene) A wird durch eine andere Linie (Ebene) B gemessen, wenn man untersucht, wie oft B in A enthalten sei. Durch die Ausmessung werden daher Linien und Ebenen als benannte Zahlen dargestellt. Ist A = mB, so heißt B das Maß, m die Maßzahl.

§. 91. Erklärung.

Zwei Linien (Ebenen) A und B, welche mit gleichem Maße C gemessen sind, stehen in demselben Verhältniß, wie ihre Maßzahlen. Ist nämlich

$A = mC$, $B = nC$, so ist $A : B = m : n$. Die mit gleichem Maße gemessenen Größen A und B heißen commensurabel, wenn ihr Verhältniß ein rationales, sie heißen incommensurabel, wenn es ein irrationales ist.

Anm. 1. Irrationale Maßzahlen lassen sich nur durch Näherungswerthe ausdrücken. Die Bedeutung von mehr oder weniger genauen Näherungswerthen haben übrigens auch alle Maßzahlen, welche mit Hülfe von Meßinstrumenten gefunden worden sind.

Anm. 2. Vergleiche Arithmetik I., Cap. II, D: „Von den benannten Zahlen", ferner Cap. IV, B: „Von den Proportionen."

§. 92. Erklärung.

Das gewöhnliche Maß für Linien ist der Fuß.

Der Fuß (1') wird eingetheilt in 12 Zoll (12"), der Zoll in 12 Linien (12'''); 12 Fuß machen eine Ruthe (1°).

Zum Gebrauch für Feldmesser theilt man auch die Ruthe in 10 Fuß, den Fuß in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien. Bei letzterer Eintheilung erhält man Decimal-, bei ersterer Duodecimalmaß.

Es ist daher in Duodecimalmaß:

$$2^{0}\ 6'\ 3''\ 5''' = 2\frac{905}{1728}{}^{0} = 30\frac{41}{144}{}' = 363\frac{5}{12}{}'' = 4361''';$$

hingegen ist in Decimalmaß:

$$2^{0}\ 6'\ 3''\ 5''' = 2{,}635^{0} = 26{,}35' = 263{,}5'' = 2635'''.$$

Anm. 1. Die Länge des Fußes ist fast in jedem Lande eine andere. Es verhält sich z. B. der preußische Fuß zum französischen wie 1 zu 1,035..., hingegen zum englischen wie 1 zu 0,938...

Anm. 2. Ein anderes, sehr verbreitetes Maßsystem ist das französische, welches den Meter (3,185... preuß. Fuß) zur Einheit hat. Es ist nach demselben:
1 Meter = 10 Decimeter = 100 Centimeter = 1000 Millimeter = 0,0000001 des Erdquadranten. Ferner sind 1000 Meter = 1 Kilometer.

§. 93. Aufgabe.

Eine Linie A durch eine Linie B zu messen.

Auflösung. Man verfertige sich einen Maßstab, indem man B auf einer unbegränzten Linie beliebig oft hintereinander abträgt, und messe A an diesem Maßstabe. Bleibt hierbei ein Rest, so theile man entweder B in 10 Theile und messe an diesen Theilen den Rest, oder man mache den Rest 10mal größer und vergleiche diesen zehnfachen Rest mit dem ursprünglichen Maßstabe. Die gefundene Zahl bezeichnet alsdann Zehntel von B. Bleibt wie-

derum ein Rest, so wiederhole man dies Verfahren, wobei man dann Zahlen erhält, welche Hunderttel u. s. w. von B bezeichnen.

Ist z. B. die Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks gleich 1, so findet man für die Cathete den Werth 0,707106..., der mit dem Ausdrucke $\sqrt{0,5}$ übereinstimmt.

§. 94. Erklärung.

Das gewöhnliche Maß für Ebenen sind die Quadrate über den in §. 92 angegebenen Längeneinheiten, nämlich die Quadratruthe (1 □°), der Quadratfuß (1 □′) u. s. w.

Fernere Maße sind: der Morgen = 180 □°, die Hufe = 30 Morgen.

Anm. In den verschiedenen Ländern haben diese Maße nicht ein und dieselbe Größe (Vergl. §. 92).

§. 95. Zusatz.

Theilt man zwei zusammenstoßende Seiten eines Quadrates jede in m gleiche Theile und zieht durch die Theilpunkte Linien den Quadratseiten parallel, so zerfällt das Quadrat in m . m kleinere, einander congruente Quadrate. Das Quadrat über dem m^ten Theil einer Linie ist also gleich dem (m . m)^ten Theil des Quadrates über der ganzen Linie.

Es ist deshalb in Duodecimalmaß:

$$1 □^0 = 144 □'; \; 1 □' = 144 □''; \; 1 □'' = 144 □''';$$
$$1 □' \, 8 □'' = 152 □'' = 1\tfrac{1}{18} □';$$

hingegen in Decimalmaß:

$$1 □^0 = 100 □'; \; 1 □' = 100 □''; \; 1 □'' = 100 □''';$$
$$1 □' \, 8 □'' = 108 □'' = 1{,}08 □'.$$

§. 96. Erklärung.

In den nachfolgenden §§., die von der Ausmessung der Figuren handeln, sollen unter den für die Linien und Ebenen gebrauchten Ausdrücken immer nur die Maßzahlen verstanden werden. Ferner soll dabei vorausgesetzt werden, daß alle Linien ein und derselben Figur, wie auch der zu vergleichenden Figuren, mit demselben Maße gemessen sind, und daß zugleich das Maß für den Inhalt dieser Figuren das Quadrat über dem angewandten Linienmaße ist.

Nach dieser Erklärung ist also unter dem Produkte aus zwei Linien das Produkt aus den Maßzahlen der mit gleichem Maße gemessenen Linien zu verstehen.

§. 97. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Beweis. Ist M das gemeinschaftliche Maß für Grundlinie und Höhe, und ist dasselbe in der Grundlinie amal, in der Höhe bmal enthalten, so denke man sich beide Linien nach diesem Maße eingetheilt und durch die Theilpunkte Linien den Rechtecksseiten parallel gezogen. Das Rechteck zerfällt alsdann in a . b Quadrate über der Linie M; es ist folglich ab die gesuchte Maßzahl, oder $(ab)M^2$ die vollständige Bezeichnung für den Inhalt, und hierbei ist a . b das Produkt aus Grundlinie und Höhe, M^2 das Quadrat über dem gemeinschaftlichen Maße dieser Linien.

§. 98. Zusatz.

Ist in §. 97 M keins der gebräuchlichen Maße (Fuß, Zoll u. s. w.), ist aber z. B. $M = \frac{1}{x}$ Fuß $= \frac{1}{x}$ N, folglich $M^2 = \frac{1}{x^2} N^2$ (§. 95), so erhält man folgende Umformungen. Es ist:

1) die Grundlinie $= aM = \frac{a}{x} N;$

2) die Höhe $= bM = \frac{b}{x} N;$

3) der Inhalt $= (a . b)M^2 = \left(\frac{ab}{xx}\right) N^2.$

In diesem Falle sind also die Maßzahlen für Grundlinie und Höhe gebrochen, aber der Inhalt ist wiederum gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

§. 99. Zusatz.

Sind Grundlinie und Höhe eines Rechtecks incommensurabel, erhält man also z. B. bei Anwendung des Maßes M für die Grundlinie die Maßzahl a, für die Höhe eine irrationale Maßzahl, die zwischen den Zahlen b und (b + 1) liegt, so ist ab der Inhalt eines etwas kleineren, a (b + 1) der eines etwas größeren Rechtecks. Der gesuchte Inhalt liegt also zwischen

den Gränzen ab und a(b + 1), und diese Gränzen liegen desto näher an einander, je kleiner M ist. Zwischen denselben Gränzen liegt aber auch jedesmal das Produkt aus Grundlinie und Höhe, und der gesuchte Inhalt ist deshalb gleich diesem Produkte, (vergl. Arithmetik I, §. 125), läßt sich aber nur durch Näherungswerthe angeben.

§. 100. Lehrsätze.

1) Zwei Rechtecke verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinien und Höhen.

2) Zwei Rechtecke von gleichen Höhen verhalten sich wie die Grundlinien, und zwei Rechtecke von gleichen Grundlinien wie die Höhen.

Anm. Die Beweise ergeben sich aus §§. 97—99.

§. 101. Lehrsätze.

1) Von den zusammenstoßenden Seiten eines Rechtecks ist jede gleich dem Quotienten aus dem Inhalte durch die andere.

2) Die Seite eines Quadrates ist gleich der Quadratwurzel aus dem Inhalte.

Anm. Die Beweise ergeben sich aus §§. 97—99.

§. 102. Aufgaben.

1) Bei einem Rechtecke ist G*) = 2′ 5″ (Dec.), H = 3′ 2″. Wie groß ist I?

Auflösung. Es ist I = (2, 5 . 3, 2) Q′ = 8 Q′.

2) Bei einem Rechtecke ist G = 6⁰ 4′ (Duod.), H = 2⁰ 5′. Wie groß ist I?

Auflösung. Es ist 6⁰ 4′ = 76′, ferner 2⁰ 5′ = 29′, daher I = (76 . 29) Q′ = 2204 Q′ = 15 Q⁰ 44 Q′.

3) Bei einem Rechtecke ist I = 8 Q′ 96 Q″ (Duod.), G = 2′ 6″. Wie groß ist H?

Auflösung. Es ist 8 Q′ 96 Q″ = $8\frac{3}{4}$ Q′, ferner 2′ 6″ = $2\frac{1}{2}$′, daher I = ($8\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2}$)′ = $3\frac{1}{2}$′ = 3′ 6″.

---

*) Es bezeichne G die Grundlinie, H die Höhe, I den Inhalt; Dec. bedeute Decimal-, Duod. bedeute Duodecimalmaß.

4) Bei einem Rechtecke ist $I = 1\,□^0\ 24\,□'\ 74\,□''$ (Dec.), $G = 3^0\ 8''$. Wie groß ist H?

Auflösung. Es ist $H = (1{,}2474 : 3{,}08)^0 = 0{,}405^0 = 4'\,5'''$.

5) Bei einem Quadrate ist $I = 1\,□^0\ 6\,□'\ 51\,□''\ 12\,□'''$ (Duod.). Wie groß ist G?

Auflös. Es ist $1\,□^0\ 6\,□'\ 51\,□''\ 12\,□''' = 3118756\,□'''$, daher $G = \sqrt{3118756}\,''' = 1766''' = 1^0\ 3''\ 2'''$.

§. 103. Lehrsätze.

1) Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

2) Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe.

3) Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der Höhe und der halben Summe der parallelen Seiten.

4) Der Inhalt eines regulären necks ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange und dem senkrechten Abstande der Seiten vom Mittelpunkte.

5) Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie und dem Radius.

Anm. 1. Die Beweise ergeben sich aus Cap. IX und aus §. 97—99. Vergleiche außerdem §§. 100 und 101.

Anm. 2. Es mag zu Lehrsatz 5) hier vorläufig bemerkt werden, daß man die Peripherie eines Kreises erhält, wenn man den Durchmesser mit der Irrationalzahl 3, 14159.... (Näherungswerth $3^1/_7$) multiplicirt.

§. 104. Zusatz.

Der Inhalt eines irregulären Vielecks wird gefunden, wenn man dasselbe in Dreiecke oder Trapeze zerlegt und dieselben einzeln berechnet.

§. 105. Erklärung.

Für die Vergleichung zweier Figuren in Bezug auf ihre Größe läßt sich von jetzt an meistens ein zweifaches Verfahren anwenden, ein geometrisches und ein arithmetisches.

Im ersteren Falle ergibt sich die Gleichheit zweier Figuren, wenn sich dieselben auf congruente Figuren zurückführen lassen, im letzteren, wenn die Rechnung gleiche Maßzahlen für die Inhalte liefert. Für die Rechnung

können sämmtliche in der Arithmetik entwickelten Formeln benutzt werden, doch sind besonders die fünf in §. 86 aufgestellten Gleichungen wichtig. Dieselben erhalten aber jetzt eine erweiterte Bedeutung. Es bezeichneten z. B. in der Gleichung

$$(M + N)^2 = M^2 + 2 \,.\, M \,.\, N + N^2$$

die vorkommenden Glieder nicht Produkte, sondern Figuren. Berechnet man nun von den einzelnen Figuren die Inhalte, so erhält man wiederum eine Gleichung, deren Glieder aber Zahlen sind. Haben z. B. die Linien M und N die Maßzahlen m und n, so erhält man für das Quadrat $(M + N)^2$ den Inhalt $(m + n)^2$, entsprechende Werthe für die übrigen Figuren. Es ist alsdann

$$(m + n)^2 = m^2 + 2\,m\,n + n^2.$$

Beide Gleichungen haben dieselbe Form, aber die erstere vergleicht gezeichnete Figuren, die letztere vergleicht berechnete Zahlenwerthe. Zu gleichen Figuren gehören indessen gleiche Inhalte, und zu gleichen Inhalten gleiche Figuren. Wenn also die Gleichung in der einen Bedeutung richtig ist, so muß sie es auch in der andern sein, und man braucht deshalb bei ihrer Benutzung nicht erst festzustellen, ob die vorkommenden Buchstaben Linien oder Zahlen bedeuten sollen. Jedes Resultat, welches die Rechnung bei Anwendung der erwähnten fünf Gleichungen liefert, hat dann ebensowohl eine arithmetische, wie eine geometrische Bedeutung. Die arithmetische ist ohne Weiteres klar, und die geometrische läßt sich auch geometrisch durch Zeichnung darstellen und nachweisen, wenn man das in §. 86 Gesagte benutzt.

Anm. Die Richtigkeit der oben abgeleiteten Gleichung $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$ ergiebt sich, da m und n Zahlen sind, schon aus den Regeln des Multiplicirens. Es ist jedoch zweckmäßig, die Anwendbarkeit einer arithmetischen Formel auf geometrische Größen auch aus geometrischen Beziehungen abzuleiten.

Aufgaben.

1) Die Grundlinie eines Parallelogramms ist 60° 4′ 8″ 5‴, die Höhe 4° 7′ 9″ 3‴. Wie groß ist der Inhalt?*)

2) Die Grundlinie eines Parallelogramms ist 10° 8″ 5‴, die Höhe 8° 3′ 7‴. Wie groß ist der Inhalt?

3) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 8′ 7″ 3‴, die Höhe 1° 3‴. Wie groß ist der Inhalt?

4) Die Grundlinie eines Dreiecks ist 20° 8′, die Höhe 8° 7′ 6″ 3‴. Wie groß ist der Inhalt?

---

*) Wo nicht das Gegentheil bemerkt wird, soll Decimalmaß genommen werden.

5) Die Grundlinie eines Dreiecks ist $8^0 7' 6''$, die Höhe $6^0 7' 3''$ (beides Duodecimalmaß). Wie groß ist der Inhalt?

6) Die parallelen Seiten eines Trapezes sind $6^0 3' 8'''$ und $5^0 3'$ (Duodecimalmaß); die Höhe ist $6' 3''$. Wie groß ist der Inhalt?

7) Der Inhalt eines Parallelogramms ist 86 Q^0 7 Q$'$, die Grundlinie ist $8^0 6' 7''$. Wie groß ist die Höhe?

8) Der Inhalt eines Dreiecks ist 12 Q^0 83 Q$'$, die Grundlinie ist $4^0 3''$. Wie groß ist die Höhe?

9) Der Inhalt eines Dreiecks ist 4 Q$'$ 8 Q$''$, die Höhe $7' 8''$. Wie groß ist die Grundlinie?

10) Der Inhalt eines Quadrates ist 8 Q$'$ 7 Q$''$. Wie groß ist die Seite?

11) Der Halbmesser eines Kreises ist $7' 8'''$. Wie groß ist der Inhalt?

12) Der Halbmesser eines Kreises ist $4' 7''$. Wie groß ist der Inhalt?

13) Der Inhalt eines Kreises ist 20 Q$'$ 88 Q$''$. Wie groß ist der Halbmesser?

14) Der Inhalt eines Kreises ist 12 Q$'$ 88 Q$''$. Wie groß ist der Halbmesser?

Auflösungen.

1) 289 Q^0 90 Q$'$ 46 Q$''$ 5 Q$'''$;	2) 83 Q^0 77 Q$'$ 60 Q$''$ 95 Q$'''$;
3) 43 Q$'$ 78 Q$''$ $9{,}5$ Q$'''$;	4) 91 Q^0 13 Q$'$ 52 Q$''$;
5) 28 Q^0 69 Q$'$ 27 Q$''$;	6) 2 Q^0 143 Q$'$ 61 Q$''$;
7) $9^0 9' 2'' 7{,}3\ldots'''$;	8) $6^0 3' 6'' 7{,}2\ldots'''$;
9) $1^0 4'' 6{,}1\ldots'''$;	10) $2' 8'' 4{,}07\ldots'''$;
11) 1 Q^0 57 Q$'$ $47{,}6\ldots$ Q$''$;	12) 69 Q$'$ $39{,}7\ldots$ Q$''$;
13) $2' 5'' 7\ldots'''$;	14) $2' 0{,}24\ldots'''$.

Elftes Capitel.

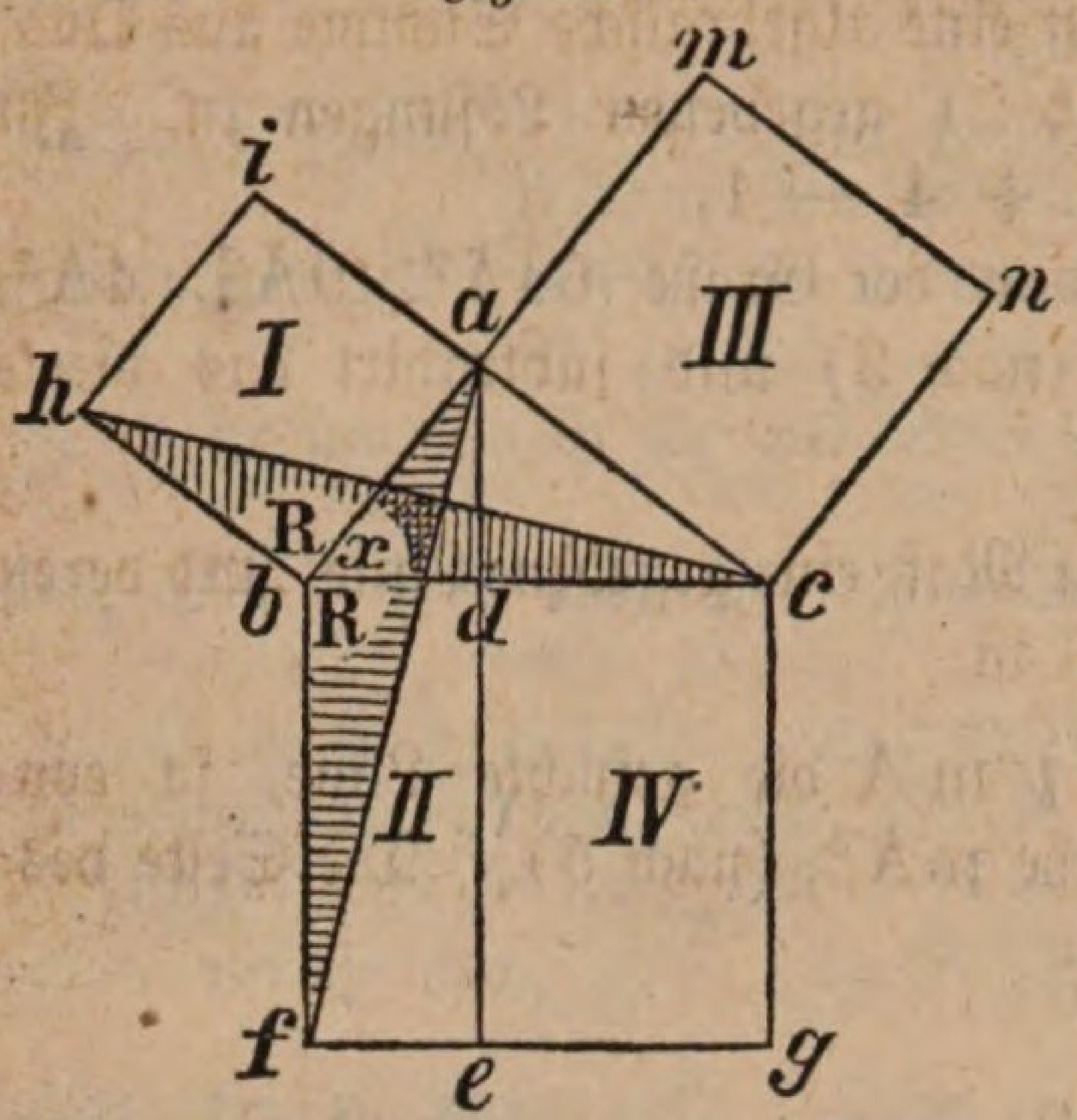
Vom Pythagoräischen Lehrsatze.

§. 106. Lehrsatz.

Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Catheten.

Beweis. Zeichnet man über den drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks abc die drei Quadrate, fällt ferner aus dem Scheitel des rechten

Fig. 53.



Winkels die Senkrechte ad auf die Hypotenuse und verlängert ad bis e, so läßt sich beweisen, daß baih = bdef, camn = cdeg, oder daß I = II, III = IV ist. Zieht man nämlich die Linie hc, so ist $\triangle$ hbc = $\frac{1}{2}$hbai, weil beide Figuren dieselbe Grundlinie und Höhe haben. Zieht man ferner die Linie af, so ist aus dem nämlichen Grunde $\triangle$ bfa = $\frac{1}{2}$bfed. Da nun $\triangle$ bhc $\cong$ $\triangle$ baf ist (bh = ba, bc = bf, $\sphericalangle$ R + x = $\sphericalangle$ R + x), so sind also die Hälften von I und II einander gleich, und folglich ist I = II. In derselben Art ergiebt sich ferner, daß auch III = IV ist.

Anm. Aus dem gegebenen Beweise folgt, daß das Quadrat über einer Cathete gleich ist dem Rechtecke aus der Hypotenuse und dem mit der Cathete zusammenstoßenden Hypotenusenabschnitte. Dieser Satz wird in den späteren §§. öfters benutzt werden.

§. 107. Aufgaben.

1) Die Summe zweier Quadrate in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man construire ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die beiden Catheten gleich den Seiten der gegebenen Quadrate sind. Die Hypotenuse ist alsdann gleich der Seite des gesuchten Quadrates (§. 106).

2) Die Differenz zweier Quadrate in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man construire ein rechtwinkliges Dreieck aus der Seite des größeren Quadrates als Hypotenuse und der des kleineren als Cathete. Die zweite Cathete ist die Seite des gesuchten Quadrates (§. 106).

3) Die Summe mehrerer Quadrate in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man wiederhole das in 1) angegebene Verfahren und benutze dabei immer den nämlichen rechten Winkel.

4) Ein Quadrat zu construiren, welches 4, 9, 16, ...m^2mal größer ist als ein gegebenes.

Auflösung. Die Seite des gesuchten Quadrates ist 2, 3, 4, ...mmal größer als die des gegebenen (§. 95).

5) Ein Quadrat zu construiren, welches mmal größer ist als ein gegebenes (A^2).

Auflösung. Man zerlege m in eine algebraische Summe aus Quadratzahlen und wende die in 4), 3) und 2) gegebenen Lösungen an. Ist z. B. $m = 76$, so ist $76 = 64 + 9 + 4 - 1$.

Man zeichnet also vier Quadrate von der Größe $64A^2$, $9A^2$, $4A^2$, $1A^2$ (nach 4), addirt die drei ersten (nach 3) und subtrahirt das vierte (nach 2).

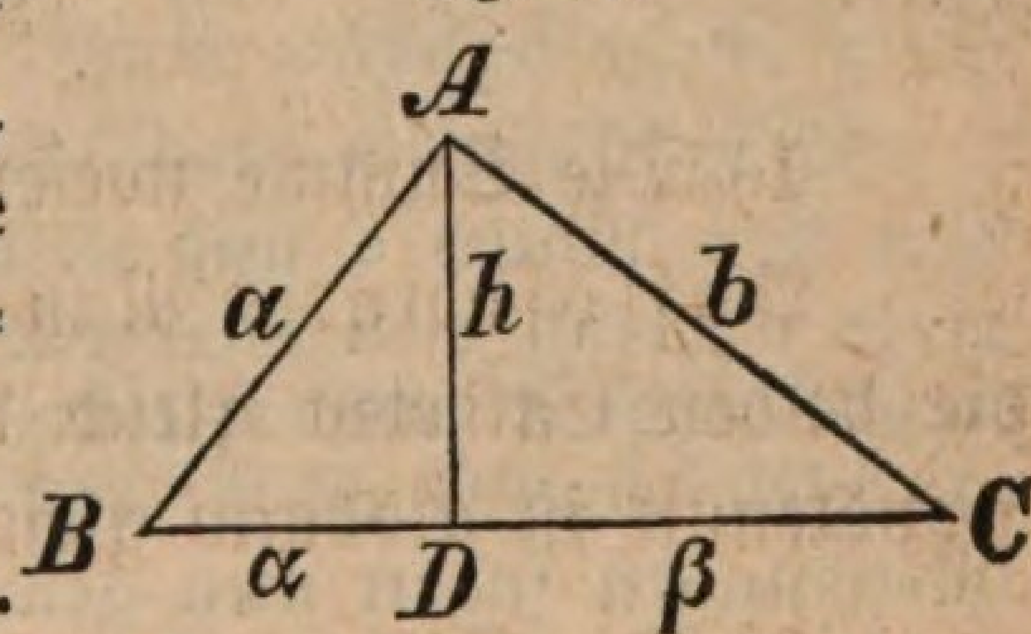
6) Eine Linie zu construiren, deren Maß eine gegebene Linie, und deren Maßzahl eine irrationale Quadratwurzel ist.

Auflösung. Ist A das Maß, $\sqrt{m}\,A$ die gesuchte Linie, so construire man ein Quadrat von der Größe mA^2 (nach 5). Die Seite desselben ist die gesuchte Linie (§. 101, 2).

§. 108. Zusatz.

Die in §. 106 entwickelten Beziehungen zwischen den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und den durch die Höhe gebildeten Hypotenusenabschnitten lassen sich zu verschiedenen Berechnungen benutzen. Bezeichnet man nämlich in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 54) die beiden Catheten AB und AC durch a und b, die Hypotenuse BC durch c (der Buchstabe c fehlt in der Figur), den an a stoßenden Hypotenusenabschnitt durch α, den anderen durch β, und bezeichnet man ferner Rechtecke und Quadrate auf die in §. 86, Anm. angegebene Art, so erhält man aus §. 106 folgende Gleichungen:

Fig. 54.



1) $a^2 = \alpha c$; 2) $b^2 = \beta c$; 3) $a^2 + b^2 = c^2$.

Sobald nun zwei dieser Linien durch ihre Maßzahlen gegeben sind, so lassen sich die übrigen mit Hülfe der angeführten Gleichungen berechnen. Ist z. B. $a = 8$, $c = 10$, so erhält man

aus 1) $\quad 64 = \alpha \,.\, 10 \;, \quad \alpha = 6\frac{2}{5}$;

aus 3) $\quad 64 + b^2 = 100, \quad b = \sqrt{100 - 64} = 6$;

aus 2) $\quad 36 = \beta \,.\, 10 \;, \quad \beta = 3\frac{3}{5}$.

Anm. Die eben gestellte Aufgabe, je drei der Größen a, b, c, α, β aus zwei gegebenen abzuleiten, läßt sich auch geometrisch lösen, doch bedarf man dazu des Pythagoräischen Lehrsatzes nicht. Es wird indessen darauf aufmerksam gemacht, daß Construction und Rechnung besondere Schwierigkeiten bieten, wenn a und β, oder b und α gegeben sind, daß daher dieser Fall noch zu übergehen ist.

§. 109. Lehrsätze.

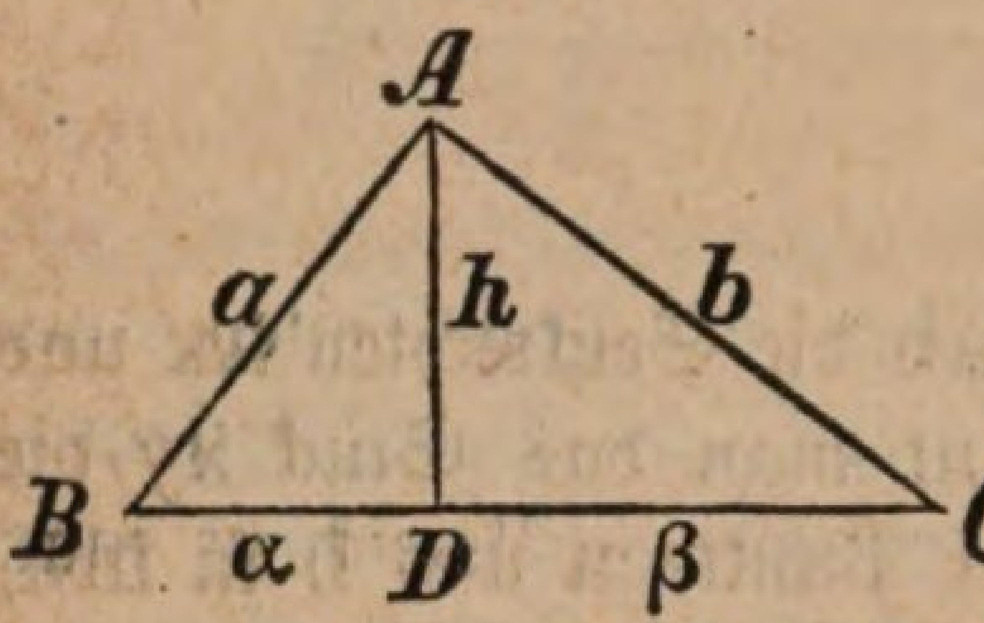
1) Die Quadrate über den beiden Catheten (a und b) eines rechtwinkligen Dreiecks verhalten sich wie die Hypotenusenabschnitte (α und β).

Beweis. Es ist (nach §. 108)

$$a^2 = \alpha c,\ b^2 = \beta c, \text{ folglich } a^2 : b^2 = \alpha c : \beta c = \alpha : \beta.$$

2) Das Quadrat über der nach der Hypotenuse gezogenen Höhe (h) eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Hypotenusenabschnitten (α und β).

Fig. 55.



Beweis. Es ist $h^2 = a^2 - \alpha^2$, ferner

$$a^2 = \alpha(\alpha + \beta) \text{ (nach §. 108)},$$

$$\text{also } h^2 = \alpha(\alpha + \beta) - \alpha^2 = \alpha\beta.$$

Anm. Es ist bei den eben gegebenen Beweisen unentschieden gelassen, ob die vorkommenden Buchstaben Linien oder Zahlen bedeuten sollen, weil beides statthaft ist. (Vergl. §. 105.) Des bessern Verständnisses wegen mag indessen noch einmal besonders nachgewiesen werden, daß die geometrische Bedeutung der aufgestellten Gleichungen sich auch auf geometrischem Wege ableiten läßt.

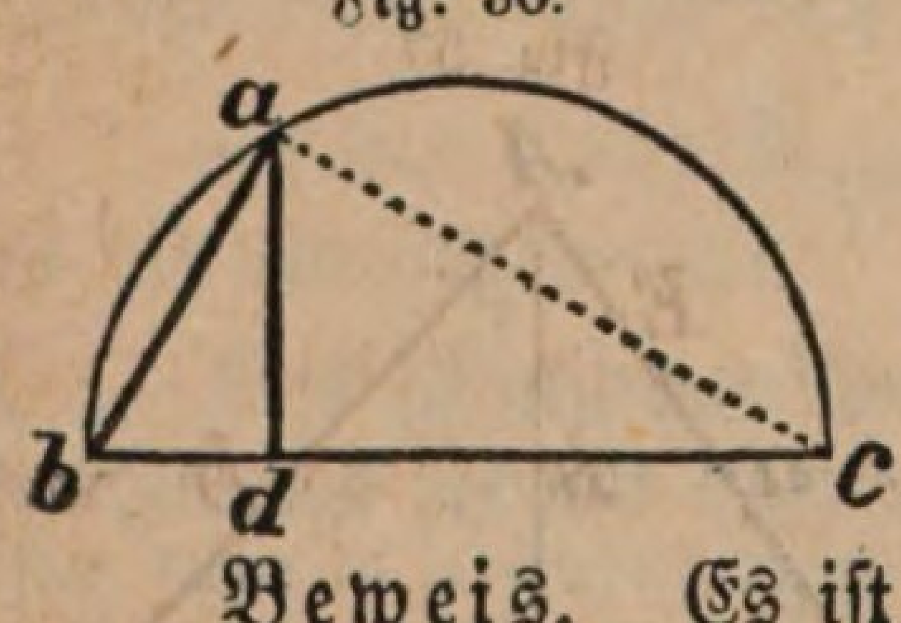
Das Quadrat über der Höhe h ist gleich der Differenz der Quadrate über den Linien a und α, aber es ist ferner (§. 106) das Quadrat über der Linie a gleich dem Rechtecke aus den Linien α und $(\alpha + \beta)$. Zeichnet man dieses Rechteck und verkleinert es um das Quadrat über der Linie α, so bleibt als Rest ein Rechteck aus den Linien α und β. Die oben vorkommenden Gleichungen sagen nun genau dasselbe, aber man hat bei ihrer Benutzung nicht nöthig, die betreffenden Figuren auch wirklich zu zeichnen.

§. 110. Aufgaben.

1) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung I). Man lege die zwei zusammenstoßenden Seiten des Rechtecks aneinander. Sind (Fig. 56) bd und dc diese Seiten, so beschreibe man über bc einen Halbkreis und errichte in d auf bc die Senkrechte da, die von der Peripherie begränzt sein muß. Alsdann ist $ad^2 = bd \cdot dc$.

Fig. 56.



Beweis. Es ist $\sphericalangle$ bac = R, ebenso $\sphericalangle$ adc = R, folglich

$$ad^2 = bd \cdot dc \text{ (nach §. 109)}.$$

Auflösung II.) Man lege die zwei zusammenstoßenden Seiten des Rechtecks aufeinander. Sind bd und bc (Fig. 56) diese Seiten, so beschreibe man über bc einen Halbkreis, errichte aus d (wie in I.) die Senkrechte da und ziehe ab. Es ist alsdann $ab^2 = bd \cdot bc$.

Beweis. Er folgt aus §. 106.

2) Ein Quadrat zu construiren, welches mmal größer ist als ein gegebenes (A^2).

Auflösung. Man construire ein Rechteck aus den Seiten A und mA und verwandele dies in ein Quadrat (nach 1).

Anm. zu 2. Vergleiche §. 107, Aufgaben 5 und 6.

§. 111. Erklärung.

Fällt man aus den Endpunkten einer Linie ab die Senkrechten ax und by auf eine andere gegebene Linie mn, so nennt man das Stück xy die Projection von ab auf mn. Liegt einer der Punkte a und b in mn, so hat man nur aus dem anderen Punkte eine Senkrechte zu fällen.

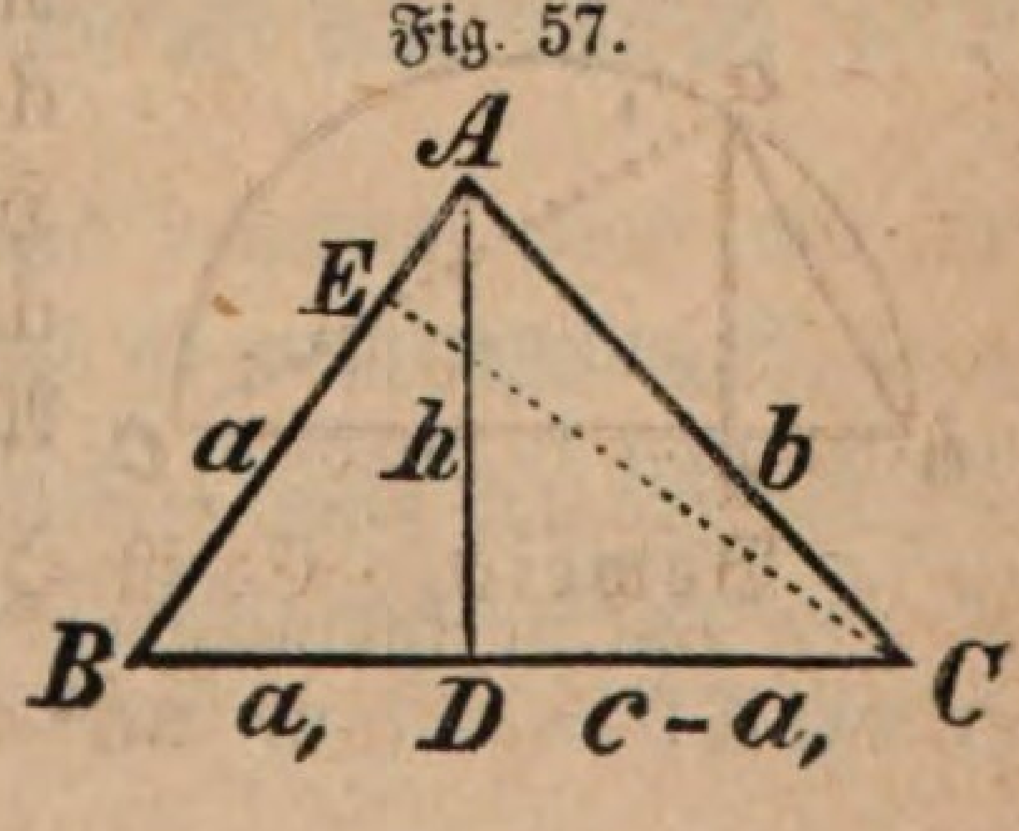
Projicirt man den einen Schenkel eines Winkels auf den anderen, so liegt die Projection entweder in diesem zweiten Schenkel, oder in seiner Verlängerung auf der anderen Seite des Scheitels, oder sie ist gleich Null, je nachdem der Winkel ein spitzer, stumpfer, oder rechter ist.

Anm. Nach der gegebenen Erklärung sind z. B. in Fig. 57 und Fig. 58, wo AD die Höhe bezeichnet, DB und DC die Projectionen von AB und AC auf BC.

§. 112. Lehrsatz.

Das Quadrat der Dreiecksseite, die einem spitzen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den zwei anderen Seiten, vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf dieselbe.

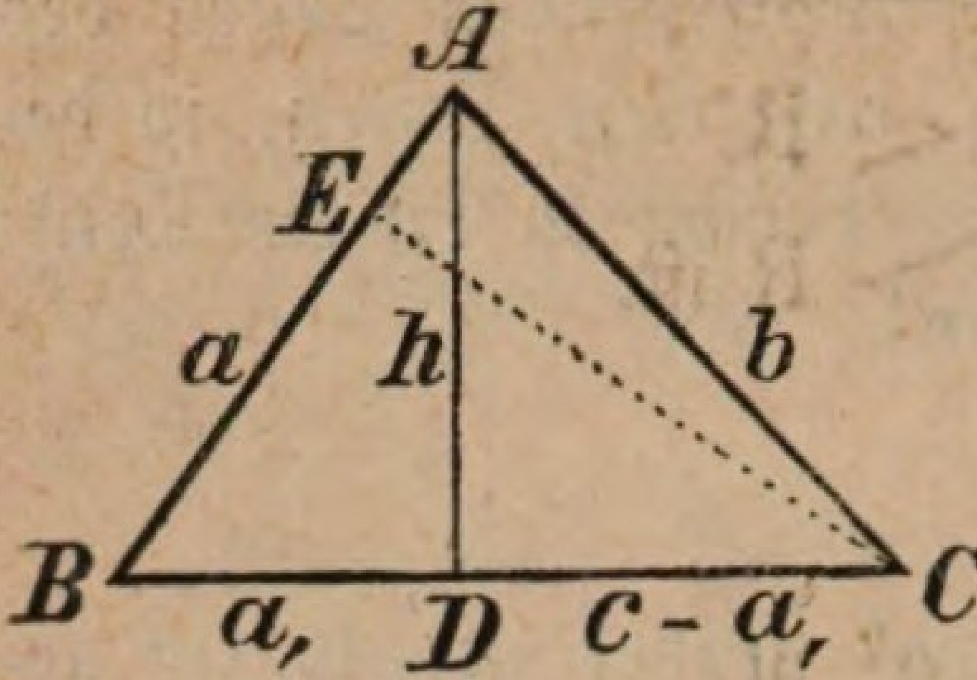
Fig. 57.



Beweis. Bezeichnet man im Dreiecke ABC, in welchem $\sphericalangle$ ABC spitz ist, die drei Seiten durch a, b, c (c fehlt in der Figur), ferner die Höhe AD durch h, endlich die Projection BD von a auf c durch $a_,$ (also die Linie CD durch $c - a_,$), so ist zu zeigen, daß

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a_,c \text{ ist.}$$

Fig. 58.



Nun ist $b^2 = h^2 + (c - a_{,})^2$

ferner $h^2 = a^2 - a_{,}^2$,

folglich $b^2 = a^2 - a_{,}^2 + (c - a_{,})^2$

$= a^2 - a_{,}^2 + c^2 - 2a_{,}c + a_{,}^2$

$= a^2 + c^2 - 2a_{,}c.$

Hätte man nicht a auf c projicirt, sondern c auf a, so würde man, wenn diese Projection BE mit $c_{,}$ bezeichnet wird, durch dieselbe Beweisführung erhalten haben:

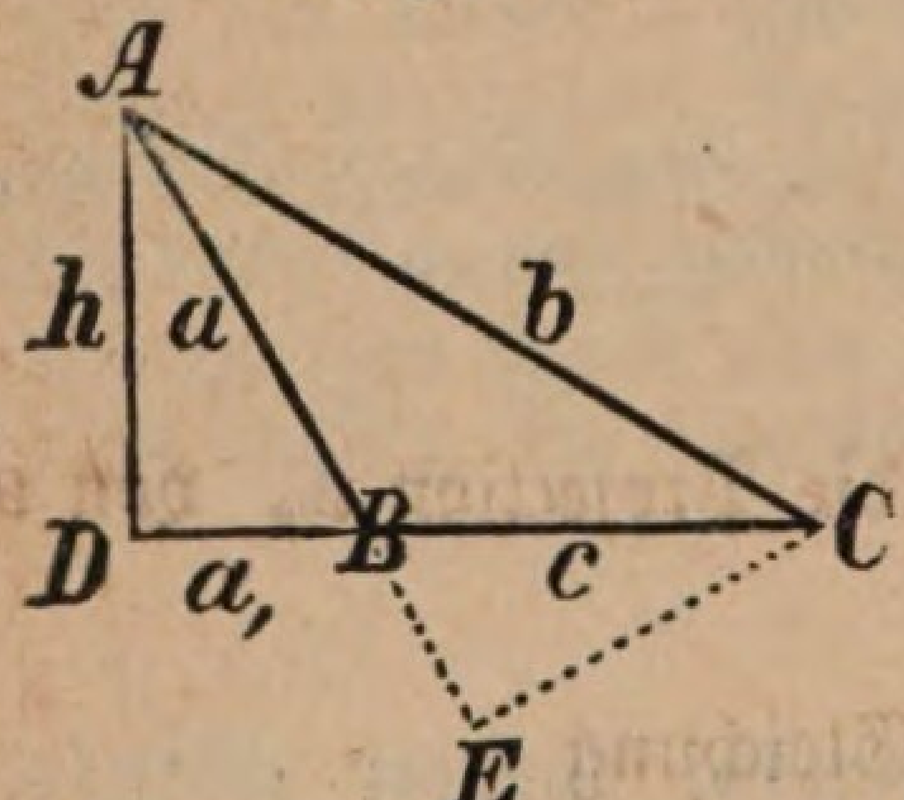
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac_{,}.$$

Anm. Es folgt aus dem Beweise, daß $a_{,}c = ac_{,}$ ist. Giebt man also den Schenkeln eines spitzen Winkels eine beliebige Länge und projicirt jeden Schenkel auf den anderen, so sind die Rechtecke aus je einem Schenkel und der Projektion des anderen auf denselben einander gleich.

§. 113. Lehrsatz.

Das Quadrat der Dreiecksseite, die einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den zwei anderen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projection der anderen auf dieselbe.

Fig. 59.



Beh. $b^2 = a^2 + c^2 + 2a_{,}c.$*)

Beweis. Derselbe ist eine wörtliche Wiederholung des in §. 112 gegebenen Beweises, sobald man in demselben überall $-a_{,}$ statt $a_{,}$ schreibt. (Vergl. §. 55, Anm. 2.)

Hätte man nicht a auf c projicirt, sondern c auf a, so würde man, wenn diese Projection BE mit $c_{,}$ bezeichnet wird, durch dieselbe Beweisführung erhalten haben:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2ac_{,}.$$

Anm. Es ergiebt sich hieraus, daß $a_{,}c = ac_{,}$ ist, daß also das in §. 113, Anm. Gesagte auch für stumpfe Winkel gilt.

§. 114. Zusatz.

Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks durch a, b, c, den Gegenwinkel von b durch β, so ist (nach §§. 106, 112, 113):

---

*) Die vorkommenden Linien sind ebenso bezeichnet, wie in §. 112, jedoch ist jetzt $CD = c + a_{,}$.

$$1)\ b^2 = a^2 + c^2, \text{ wenn } \beta = R,$$

$$2)\ b^2 < a^2 + c^2, \text{ wenn } \beta < R,$$

$$3)\ b^2 > a^2 + c^2, \text{ wenn } \beta > R \text{ ist.}$$

Ebenso ist aber auch

$$\beta \gtreqless R, \text{ wenn } b^2 \gtreqless a^2 + c^2 \text{ ist,}$$

für welchen Satz sich der indirecte Beweis leicht führen läßt.

Anm. Ist $b^2 = a^2 + c^2$, das Dreieck also rechtwinklig, und sind a, b, c rational, haben sie z. B. die Maßzahlen 3, 4, 5, oder 5, 12, 13 u. s. w., so heißt das Dreieck ein Pythagoräisches.

§. 115. Zusatz.

Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks durch a, b, c, die Projection von a auf c durch $a_,$, so ist stets

$$b^2 = a^2 + c^2 \mp 2a_,c.$$

Diese Gleichung ist (nach §§. 112 und 113) richtig, wenn b einem spitzen oder stumpfen Winkel gegenüberliegt. Sie ist aber auch richtig, wenn der Gegenwinkel von b ein Rechter ist, denn alsdann ist $a_, = 0$ (§. 111), und die Gleichung sagt also für diesen Fall weiter Nichts, als daß $b^2 = a^2 + c^2$ ist.

§. 116. Aufgabe.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks die Projection $a_,$ von a auf c zu berechnen.

Auflösung. Man erhält aus §. 115 die Gleichung

$$a_, = \pm \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}.$$

Das negative Vorzeichen wird gesetzt, wenn b einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, also $b^2 > a^2 + c^2$ ist.

Anm. Beim Rechnen mit wirklichen Zahlen berechnet man nur den Ausdruck $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$ und giebt dem Resultate das positive Vorzeichen. Das aus der Berechnung sich ergebende Vorzeichen muß folglich geändert werden, wenn β, der Gegenwinkel von b, stumpf ist, wenn also $a_,$ in der Verlängerung der Grundlinie liegt. Man erhält z. B.:

1) aus a, b, c = 3, 5, 4 den Ausdruck $\frac{3^2+4^2-5^2}{2.4}=0$,

folglich das Resultat: $a_{,}=0$, $\beta = R$,

2) aus a, b, c = 3, 2, 4 den Ausdruck $\frac{3^2+4^2-2^2}{2.4}=+2\frac{5}{8}$,

folglich das Resultat: $a_{,}=2\frac{5}{8}$, $\beta < R$,

3) aus a, b, c = 3, 6, 4 den Ausdruck $\frac{3^2+4^2-6^2}{2.4}=-1\frac{3}{8}$,

folglich das Resultat: $a_{,}=1\frac{3}{8}$, $\beta > R$.

§. 117. Aufgaben.

Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks zu berechnen:

1) die zu c gehörende Höhe h,

2) den Inhalt I des Dreiecks.

Aufl. zu 1). Es ist stets $h^2 = a^2 - a_{,}^2$ (§§. 112, 113, 111), oder $h^2 = (a + a_{,}) . (a - a_{,})$, also (nach §. 116)

$$h^2 = \left(a + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right) \cdot \left(a - \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)$$

$$= \left(\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2c}\right) \cdot \left(\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2c}\right)$$

$$= \frac{(a+c)^2-b^2}{2c} \cdot \frac{b^2-(a-c)^2}{2c}$$

$$= \frac{(a+c+b).(a+c-b).(b+a-c).(b-a+c)}{4c^2},$$

daher $h = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$

$$= \frac{1}{2c}\sqrt{SABC}.^{*)}$$

Auflösung zu 2). Es ist $I = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{4}\sqrt{SABC}$ (nach 1).

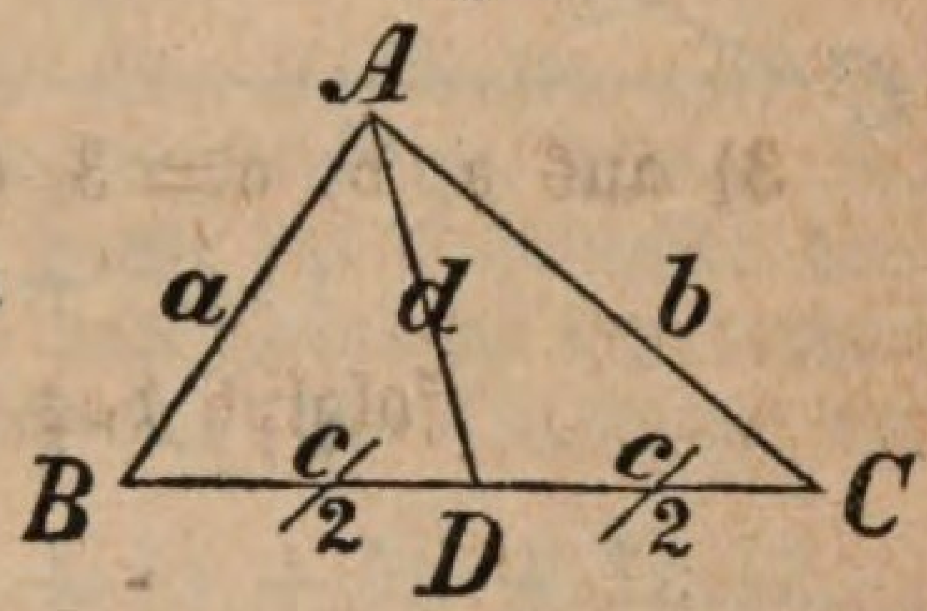
---

*) Der Ausdruck SABC ist eine leicht zu verstehende Abkürzung.

§. 118. Lehrsatz.

Die Summe der Quadrate über zwei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem halben Quadrate über der dritten, vermehrt um das doppelte Quadrat über der Linie, welche den Mittelpunkt der dritten Seite mit der Gegenecke verbindet.

Fig. 60.



Vor. $BD = CD = \frac{1}{2}c$.

Beh. $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2d^2$.

Beweis. Bezeichnet man die Projection von d auf c durch $d_,$, so ist stets (nach §. 115)

1) im Dreiecke ABD

$$a^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} \mp 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot d_,;$$

2) im Dreiecke ACD

$$b^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} \pm 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot d_,.$$

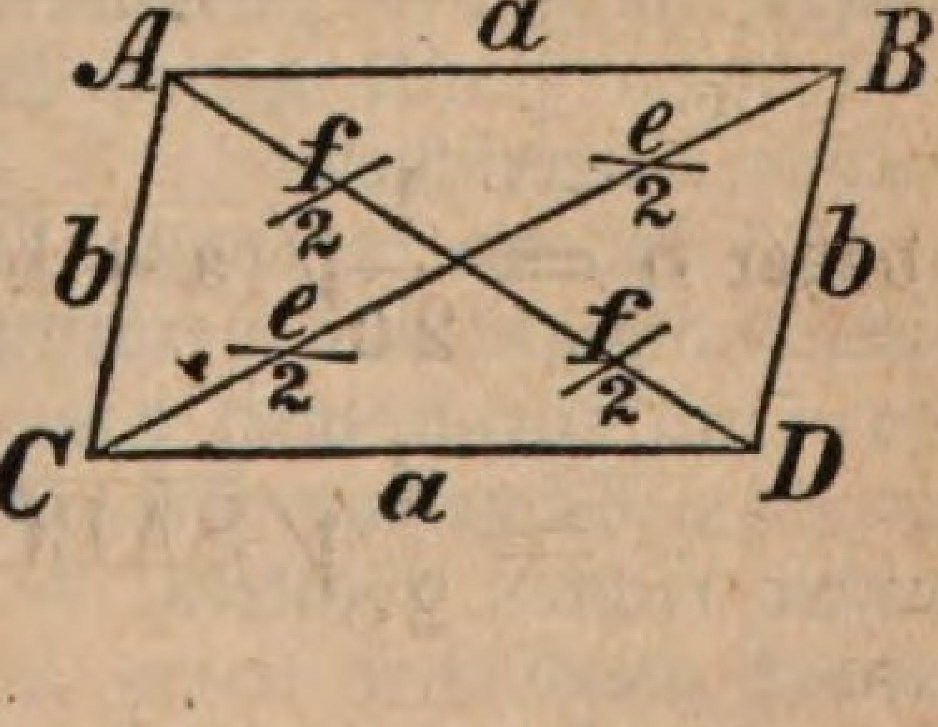
Addirt man diese beiden Gleichungen, so erhält man

$$a^2 + b^2 = 2d^2 + \frac{c^2}{2}.$$

§. 119. Lehrsatz.

Die Summe der Quadrate über den vier Seiten eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate über den zwei Diagonalen.

Fig. 61.



Beh. $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$.

Beweis. Es ist nach vorigem §. in jedem der Dreiecke ABC und DBC:

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}e^2 + 2(\frac{1}{2}f)^2.$$

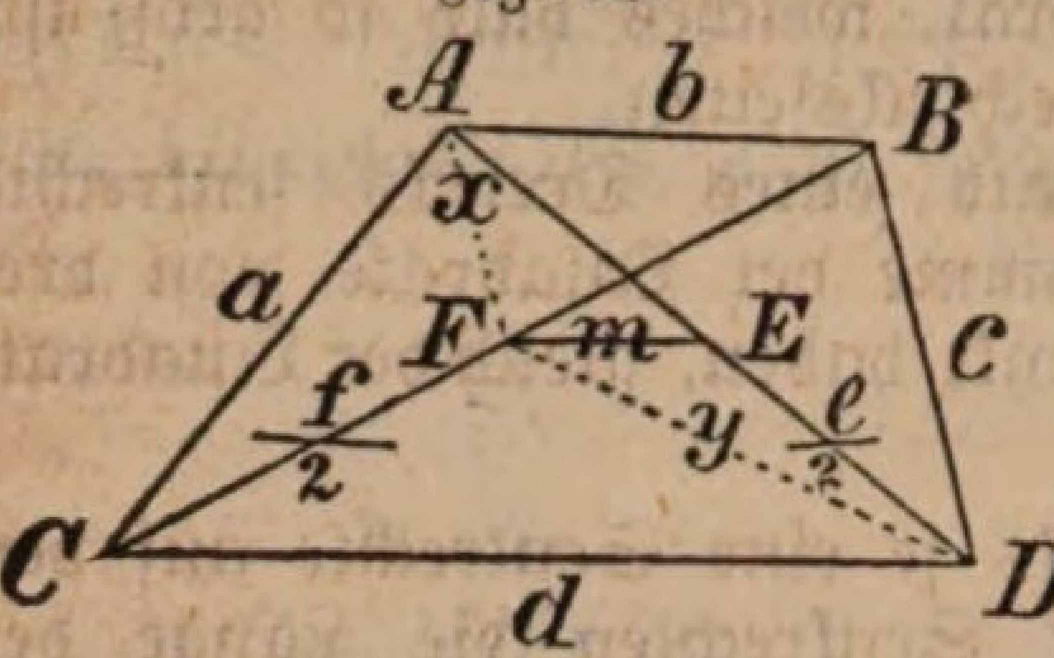
Daher ist $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$.

§. 120. Lehrsatz.

Die Summe der Quadrate über den vier Seiten eines Vierecks ist gleich der Summe der Quadrate über den zwei

Diagonalen, vermehrt um das vierfache Quadrat über der Linie, welche die Mittelpunkte der Diagonalen verbindet.

Fig. 62.



Vor. $AE = ED = \frac{1}{2}e$;
$BF = FC = \frac{1}{2}f$.

Beh. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = e^2 + f^2 + 4m^2$.

Beweis. Es ist (nach §. 118) in den beiden Dreiecken ABC und DBC:

$$1)\ a^2 + b^2 = \tfrac{1}{2}f^2 + 2x^2,$$

$$2)\ c^2 + d^2 = \tfrac{1}{2}f^2 + 2y^2.$$ Folglich ist

$$3)\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + 2(x^2 + y^2).$$ Nun ist (§. 118)

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}e^2 + 2m^2,$$ daher

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + e^2 + 4m^2.$$

Anm. 1. Der Lehrsatz des vorigen §. ist ein besonderer Fall dieses Satzes.

Anm. 2. Nennt man die zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten und ferner das Diagonalpaar die drei Paare von Gegenseiten, so ist jedesmal die Summe der Quadrate über zwei Paaren von Gegenseiten gleich der Summe der Quadrate über den zwei noch übrigen Gegenseiten, vermehrt um das vierfache Quadrat über der Linie, welche die Mittelpunkte dieser zwei Gegenseiten verbindet. Dies ist die allgemeinere Form des obigen Lehrsatzes, doch müssen alsdann die einzelnen Fälle besonders bewiesen werden.

Uebungssätze.

1) Zieht man in einem Dreiecke eine Höhe, so ist das Rechteck, welches aus der Summe und der Differenz der Segmente der Grundlinie gebildet wird, eben so groß wie das Rechteck aus der Summe und der Differenz der beiden anderen Seiten.

2) Errichtet man aus einem beliebigen Punkte einer Linie ab eine Senkrechte, so haben jedesmal die Quadrate über den zwei Linien, welche einen beliebigen Punkt dieser Senkrechten mit a und b verbinden, ein und denselben Unterschied.

3) Wenn in einem Vierecke eins von den drei Paaren der Gegenseiten sich (nöthigenfalls verlängert) unter einem rechten Winkel schneidet, so sind die Quadratsummen des zweiten und dritten Paares unter einander gleich.

4) Schneiden sich in einem Vierecke alle drei Paare der Gegenseiten unter rechten Winkeln, so sind die Quadratsummen derselben alle unter einander gleich.

5) Ist in einem Dreiecke einer der Winkel halb so groß als die Summe der beiden anderen, so ist das Quadrat seiner Gegenseite um das Rechteck aus den beiden anderen Seiten kleiner, als die Summe der Quadrate dieser beiden anderen Seiten.

6) Halbirt man in einem Rechtecke alle inneren Winkel, so bilden die Halbirungslinien ein Quadrat, welches halb so groß ist, als das Quadrat über der Differenz der zwei verschiedenen Rechtecksseiten; halbirt man hingegen die äußeren Winkel, so entsteht ein Quadrat, welches halb so groß ist, als das Quadrat über der Summe der zwei Rechtecksseiten.

7) Fällt man aus einem Punkte innerhalb eines Dreiecks senkrechte Linien auf die Seiten desselben, so ist die Summe der Quadrate von drei Seitenstücken, die keinen gemeinschaftlichen Endpunkt haben, gleich der Quadratsumme der drei übrigen.

8) Errichtet man in einer Ecke eines Dreiecks je eine Senkrechte auf den zwei sich hier schneidenden Seiten, giebt jeder Senkrechten die Länge der Seite, auf welcher sie senkrecht steht, und verbindet dann die Endpunkte derselben, so ist das Quadrat dieser Verbindenden und das Quadrat der dritten Dreiecksseite zusammen doppelt so groß als die Summe der Quadrate der beiden genannten Dreiecksseiten.

9) Schneidet man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks aus ihren Endpunkten Stücke ab, welche gleich den Catheten sind, so ist das Quadrat der Linie, welche zwischen den beiden Abschnittspunkten liegt, doppelt so groß als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die eine und die andere Cathete.

10) Fällt man in einem rechtwinkligen Dreiecke aus dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Winkel halbirenden Linien eine Senkrechte auf eine der Seiten, so ist das Quadrat derselben halb so groß als das Rechteck aus den Ueberschüssen der Hypotenuse über die eine und die andere Cathete.

11) Verbindet man die Halbirungspunkte der Seiten eines Dreiecks mit den Gegenecken, so ist die vierfache Summe der Quadrate dieser Linien gleich der dreifachen Summe der Quadrate der Dreiecksseiten.

12) Wenn man jede der Catheten eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre eigene Länge verlängert und jeden der Endpunkte mit der Gegenecke verbindet, so ist die Summe der Quadrate dieser vier Verbindenden siebenmal so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

13) Verlängert man die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks über jeden ihrer Endpunkte hinaus um ihre eigene Länge und verbindet die neuen Endpunkte mit der Spitze des rechten Winkels, so ist die Summe der Quadrate der Verbindenden fünfmal so groß als das Quadrat der Hypotenuse.

14) In jedem Trapeze ist die Summe der Quadrate beider Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der beiden nicht parallelen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden parallelen Seiten.

15) Nimmt man außerhalb eines gleichseitigen Dreiecks einen beliebigen Punkt, so ist die Summe der Quadrate der Linien, die ihn mit den Ecken des Dreiecks verbinden, dreimal so groß als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Höhendurchschnitt des Dreiecks (d. h. den Punkt, in welchem sich die drei Höhen schneiden) mit einer seiner Ecken und mit eben jenem Punkte außerhalb verbinden.

16) Nimmt man in der Ebene eines Quadrates einen beliebigen Punkt, so ist die Summe der Quadrate der Linien, welche ihn mit den Ecken der Figur verbinden, viermal so groß als die Quadratsumme der beiden Linien, welche den Durchschnittspunkt der Diagonalen mit einer der Ecken und mit eben jenem Punkte verbinden.

17) Verbindet man in einem Fünfecke jede Ecke mit den Halbirungspunkten der nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate von allen ersten und dritten dieser Halbirenden um $^3/_4$ der Quadratsumme der Umfangsseiten größer als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden.

18) Verbindet man in einem $n$ecke von ungerader Seitenzahl jede Ecke mit den Halbirungspunkten der nicht anliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate von allen ersten, dritten, fünften u. s. w. dieser Halbirenden um $^3/_4$ der Quadratsumme der Umfangsseiten größer als die Summe der Quadrate der übrigen Halbirenden.

19) Verbindet man in einem Vierecke jede Ecke mit den Halbirungspunkten der beiden gegenüberliegenden Umfangsseiten, so ist die Summe der Quadrate aller ersten Halbirenden gleich der Summe der Quadrate aller zweiten.

20) Verfährt man ebenso bei einem $n$ecke von gerader Seitenzahl, so ist die Summe der Quadrate aller ersten, dritten, fünften u. s. w. Halbirenden gleich der Quadratsumme der zweiten, vierten u. s. w.

21) Verbindet man in einem Vierecke die Halbirungspunkte von je zwei Gegenseiten, so ist die Summe der Quadrate dieser Verbindenden viermal so klein als die Quadratsumme aller Seiten.

22) Zieht man aus dem Mittelpunkte eines Kreises nach einem beliebigen Punkte einer Sehne (Secante) eine Gerade, so ist das Quadrat des Radius so groß als das Quadrat dieser Geraden, vermehrt (vermindert) um das Rechteck aus den beiden Abschnitten der Sehne (Secante).

Zwölftes Capitel.

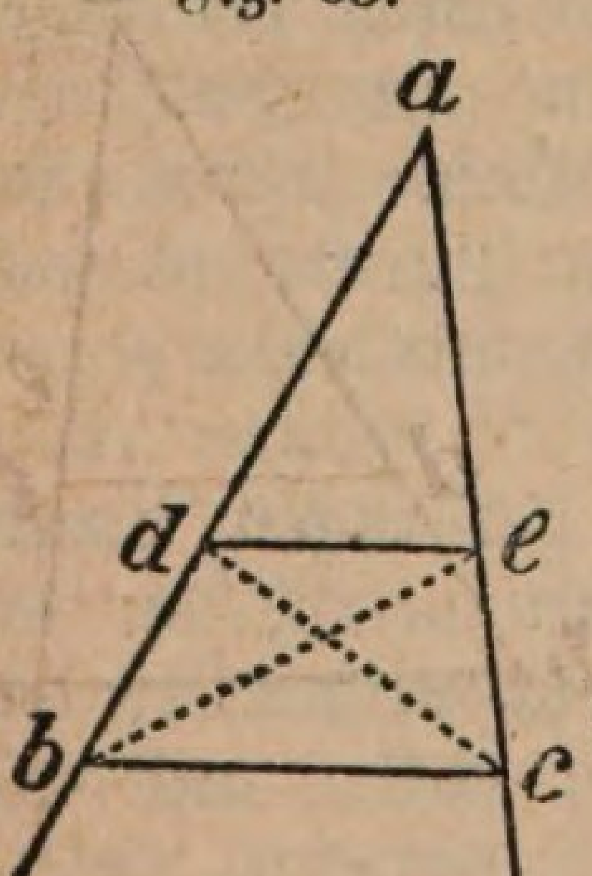
Von den proportionirten Linien und von der Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke.

A. Von den proportionirten Linien.

§. 121. Lehrsatz.

Zieht man durch die Schenkel eines Winkels zwei parallele Linien, so werden beide Schenkel nach demselben Verhältnisse getheilt.

Fig. 63.



Vor. de || bc.

Beh. ad : db = ae : ec.

Beweis. Zieht man die Linien be und dc, so ist

ad : db = △ ead : △ edb (§. 103, 2),

ae : ec = △ ead : △ ecd.

Nun ist aber △ edb = △ ecd (§. 83, 2), folglich auch

ad : db = ae : ec.

§. 122. Zusatz.

Aus der Proportion ad : db = ae : ec folgt:

1) ad : ae = db : ec;

2) (ad + db) : db = (ae + ec) : ec, oder

ab : db = ac : ec, oder

ab : ac = db : ec.

Aus 1) und 2) folgt:

3) ab : ac = ad : ae = db : ec.

Es verhalten sich also die Linien ab und ac ebenso, wie ihre oberen und wie ihre unteren Abschnitte.

Aus vorigem §. folgt ferner, daß die Schenkel eines Winkels auch von beliebig vielen Parallelen nach demselben Verhältnisse getheilt werden.

§. 123. Zusatz.

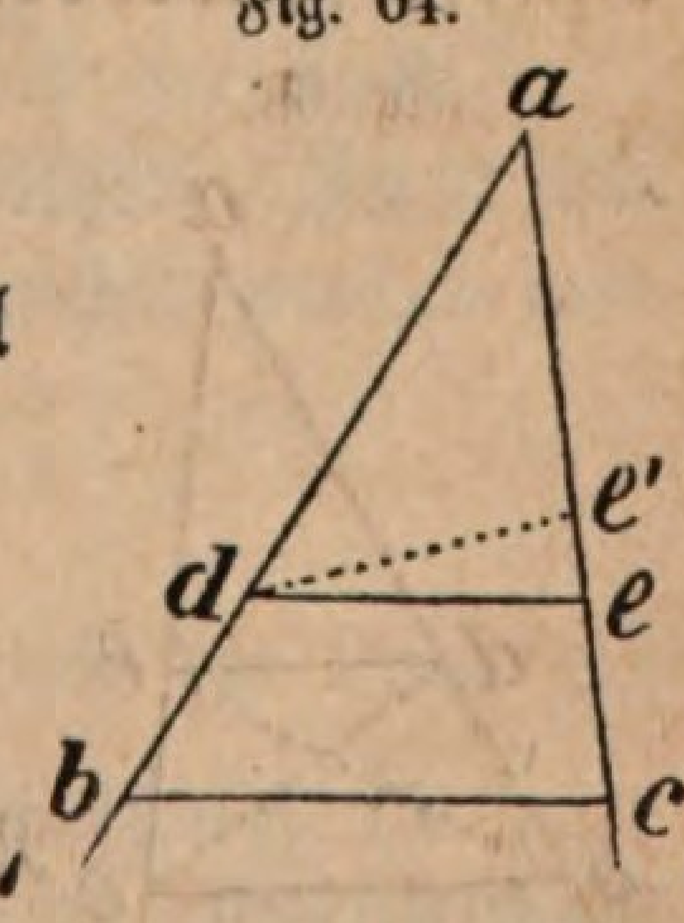
Stehen vier Linien A, B, C, D in Proportion, so daß A:B = C:D ist, so gilt dies auch für die Maßzahlen a, b, c, d. Aus der Proportion a : b = c : d folgt aber die Gleichung ad = bc, d. h. ein aus den Seiten A und D gebildetes Rechteck hat denselben Inhalt wie ein aus den Seiten B und C gebildetes.

Haben umgekehrt zwei Rechtecke gleichen Inhalt, so bilden die zwei Seiten des einen die inneren, die zwei Seiten des anderen die äußeren Glieder einer Proportion.

§. 124. Lehrsatz.

Trägt man auf den Schenkeln eines Winkels vom Scheitel aus proportionirte Stücke ab, so sind die Verbindungslinien der Endpunkte dieser proportionirten Stücke einander parallel.

Fig. 64.



Vor. ad : ab = ae : ac.

Beh. de || bc.

Beweis. Man nehme an, daß de nicht parallel bc sei, und ziehe aus d die Linie de' || bc. Dann ist

ad : ab = ae : ac (Vorauss.),

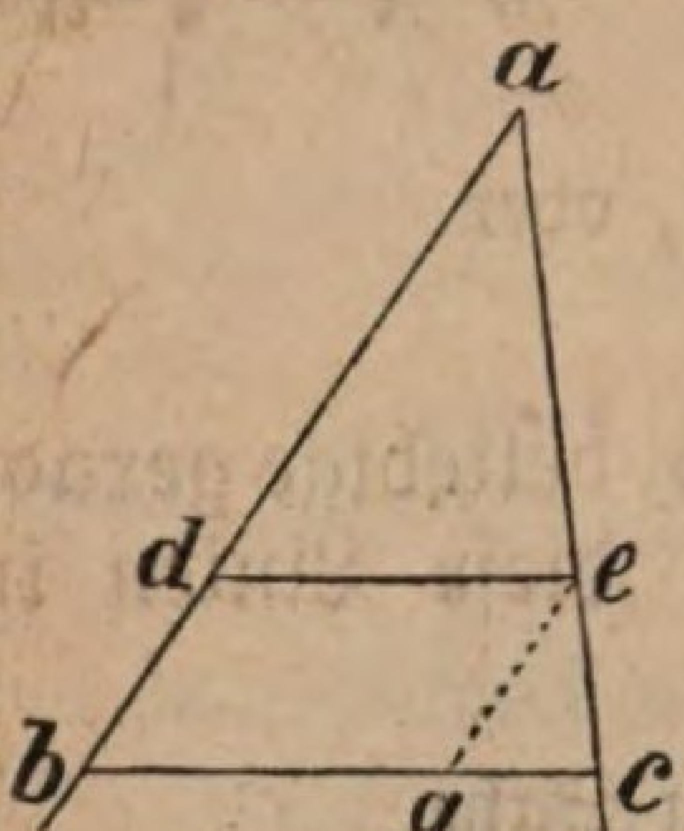
ferner ad : ab = ae': ac (Annahme).

Es ist folglich ae = ae', d. h. die Punkte e und e' fallen zusammen, und es ist de || bc.

§. 125. Lehrsatz.

Werden die Schenkel eines Winkels von parallelen Linien durchschnitten, so verhalten sich die zwischen den Schenkeln liegenden Abschnitte der Parallelen wie die von ihnen abgeschnittenen Stücke.

Fig. 65.



Vor. de || bc.

Beh. de : bc = ae : ac = ad : ab.

Beweis. Zieht man eg || ab, so ist

ae : ac = bg : bc, oder, da bg = de ist,

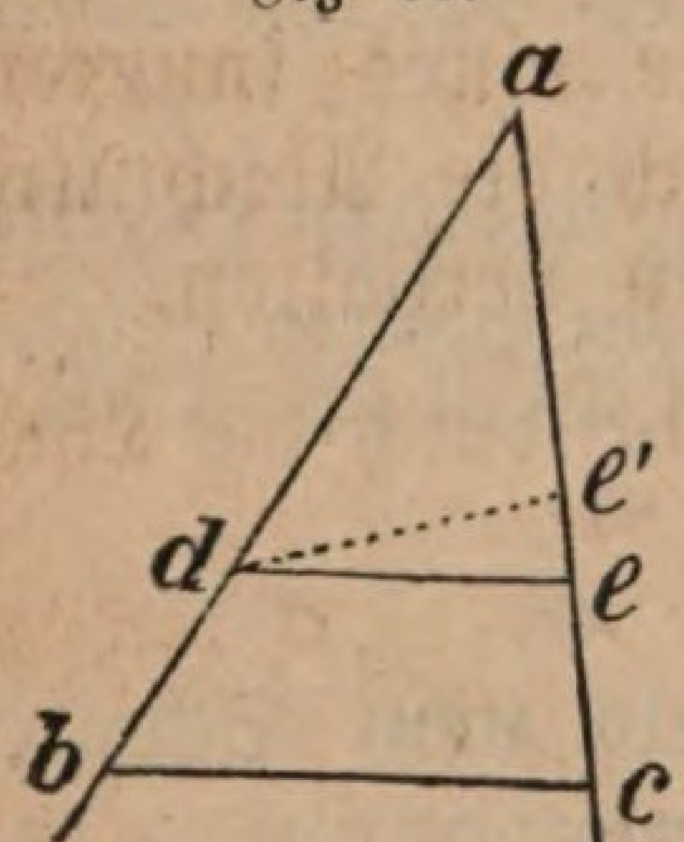
ae : ac = de : bc,

oder de : bc = ae : ac = ad : ab.

§. 126. Zusatz.

Es sei in beistehender Figur de || bc, folglich

Fig. 66.



de : bc = ad : ab.

Beschreibt man nun aus d mit dem Radius de einen Bogen, so kann dieser den Schenkel ac in noch einem Punkte e′ schneiden. Alsdann ist auch

de′ : bc = ad : ab, aber nicht

de′ || bc, oder

∢ ae′d = ∢ acb, sondern

∢ ae′d + ∢ acb = 2R.

Aus der Proportion de : bc = ad : ab folgt nicht, daß de || bc sein muß. Letzteres ist nur dann der Fall, wenn die Linien de und bc mit dem andern Schenkel ac gleichartige Winkel bilden (Vergl. §. 31).

§. 127. Lehrsätze.

1) Zieht man aus einem Punkte Linien nach beliebigen Richtungen, so werden alle Parallelen, die man durch diese Linien hindurchzieht, nach demselben Verhältnisse getheilt.

Vor. mw || MW.

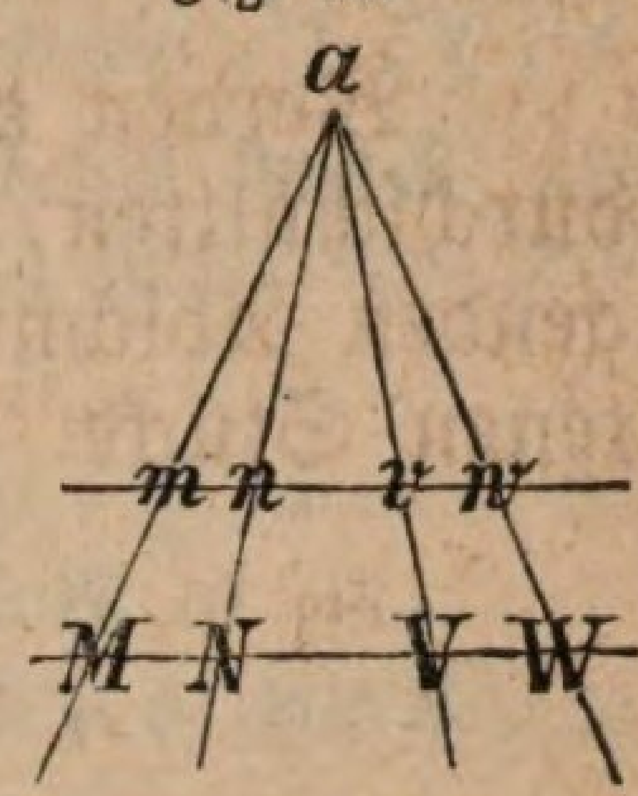
Beh. mn : nv : vw = MN : NV : VW.

Bew. Es ist 1) am : aM = an : aN = av : aV = aw : aW.

2) mn : MN = am : aM,
nv : NV = an : aN,
vw : VW = av : aV.

Folglich ist mn : MN = nv : NV = vw : VW, oder
mn : nv : vw = MN : NV : VW.

Fig. 67.



2) Werden zwei oder mehr Parallelen durch beliebige gerade Linien proportionirt getheilt, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte.

Beweis. Er ergiebt sich indirekt aus dem vorigen Satze.

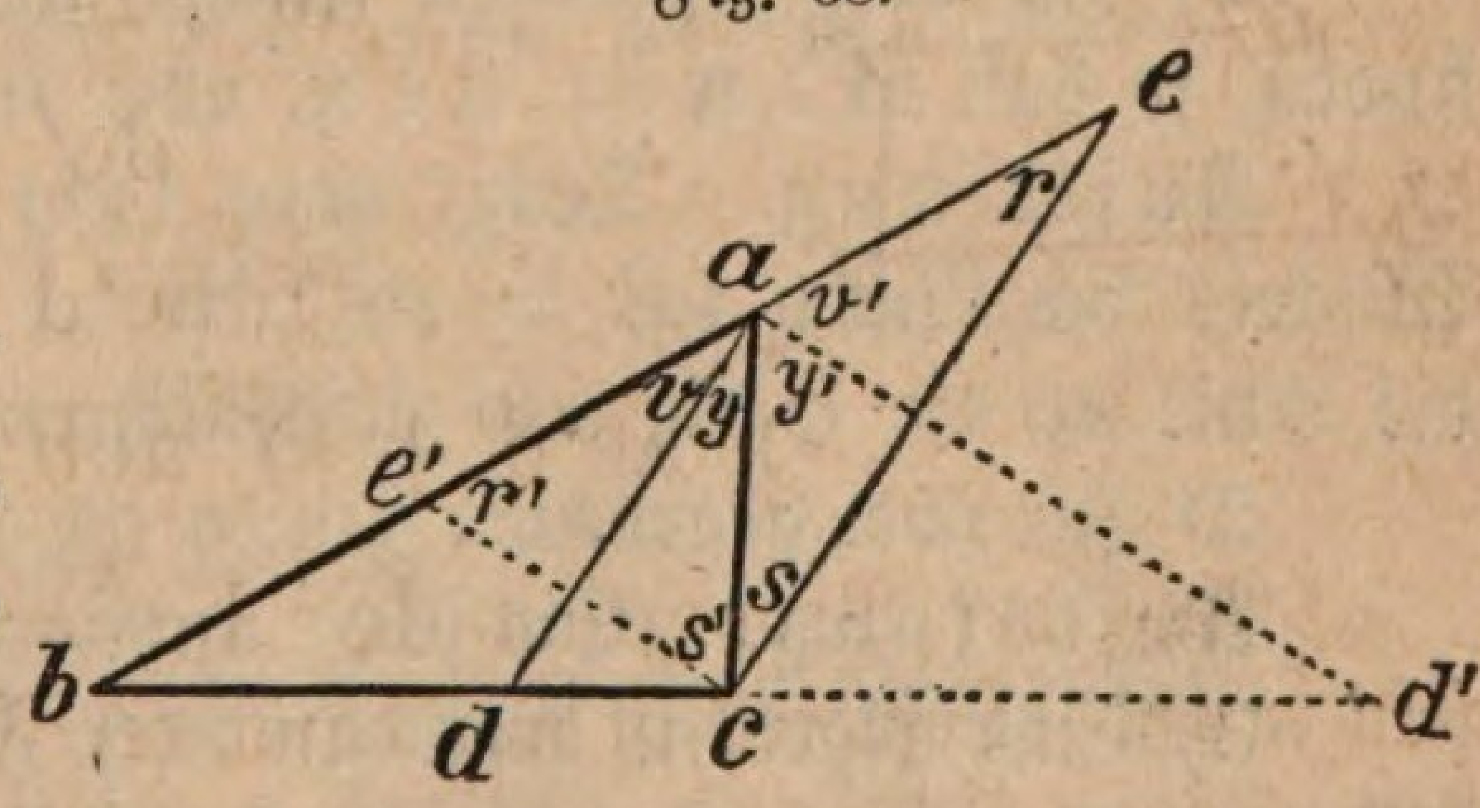
Anm. Der zu 1) gegebene Beweis stützt sich blos darauf, daß mn || MN, nv || NV, vw || VW ist, bleibt also ungeändert, wenn mnvw und MNVW nicht gerade, sondern gebrochene Linien sind. Auch für diesen Fall sind also beide Sätze richtig.

§. 128. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke theilt die Halbirungslinie eines inneren oder äußeren Winkels die Gegenseite so, daß sich die Abschnitte derselben wie die ihnen anliegenden Dreiecksseiten verhalten.

1) Es sei der innere Winkel bac des Dreiecks abc durch die Linie ad halbirt.

Fig. 68.



Vor. v = y.

Beh. bd : cd = ab : ac.

Beweis. Verlängert man ba über a hinaus und zieht ce || da, so ist v = r, y = s, also r = s, ae = ac.

Nun ist bd : dc = ba : ae,
daher auch bd : cd = ab : ac.

2) Es sei der äußere Winkel cae des Dreiecks durch die Linie ad′ halbirt (Fig. 68).

Vor. v′ = y′.

Beh. bd′ : cd′ = ab : ac.

Beweis. Man benutze den Beweis zu 1) wörtlich, indem man nur v', y', r', s', d', e' statt v, y, r, s, d, e setzt.

Anm. 1. Aus den beiden Proportionen

$$bd : cd = ab : ac$$
$$bd' : cd' = ab : ac$$

folgt, daß $bd : cd = bd' : cd'$ ist.

Außerdem ist $ae = ac = ae'$.

Anm. 2. Die beiden Sätze lassen sich umkehren.

§. 129. Zusatz.

Aus dem Bisherigen ergeben sich die Beweise folgender Sätze:

1) Haben zwei Dreiecke einen gleichen Winkel, und ist das Produkt der den Winkel einschließenden Seiten in beiden Dreiecken dasselbe, so haben die beiden Dreiecke denselben Inhalt.

2) Halbirt man alle Seiten eines beliebigen Vierecks und verbindet die aufeinanderfolgenden Halbirungspunkte derselben, so entsteht ein Parallelogramm, welches halb so groß als das Viereck ist.

3) Werden die parallelen Seiten eines Trapezes proportionirt getheilt, so daß sich je zwei proportionirte Stücke gegenüberliegen, so geht die Verbindungslinie je zweier gleichliegenden Theilpunkte durch den Durchschnittspunkt der nicht parallelen Seiten.

Anm. zu 2. Wann ist das entstehende Parallelogramm ein Rhombus, und wann ein Rechteck?

§. 130. Aufgaben.

1) Zu drei gegebenen Linien m, n, o die vierte Proportionale zu finden, so daß $m : n = o : x$, oder $mx = no$ ist.

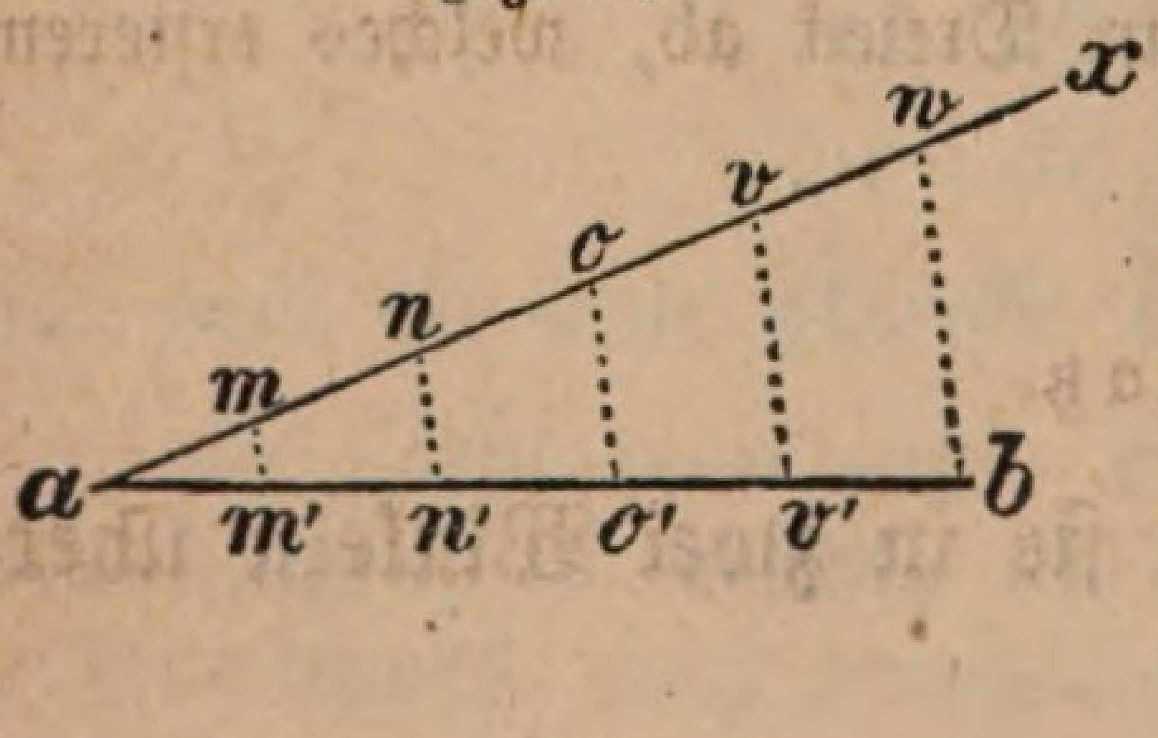
Auflösung. Trägt man (Fig. 63) auf dem einen Schenkel eines Winkels die Linien $ad = m$, $db = n$, ferner auf dem anderen Schenkel die Linie $ae = o$ ab, und zieht man endlich $bc \parallel de$, so ist $ec = x$.

2) Zu zwei gegebenen Linien die mittlere Proportionale zu finden.

Auflösung. Sie folgt unmittelbar aus §. 110.

3) Eine gegebene Linie ab in p gleiche Theile zu theilen.

Fig. 69.



Auflösung. Man lege unter einem spitzen Winkel die unbegränzte Linie ax an ab an, trage auf derselben aus a das beliebige Stück am $p$mal (in der Figur ist es 5mal geschehen) hintereinander ab, verbinde den Endpunkt w des letzten Stückes mit b und ziehe durch die übrigen Theilpunkte m,

n, o, v Parallelen mit wb. Die Punkte m', n', o', v', in welchen ab von diesen Parallelen geschnitten wird, sind die gesuchten Theilpunkte.

Anm. Der Beweis folgt aus §. 122. Aus §. 125 folgt ferner, daß mm' : nn' : oo' : vv' : wb = 1 : 2 : 3 : 4 : 5 ist. Diese Beziehung findet ihre Anwendung beim verjüngten Maßstabe.

4) Eine Linie ab in Theile zu zerlegen, die sich wie p : q : r u. s. w. verhalten.

Auflösung. Sie folgt aus 3, wenn man auf ax aus a nicht gleiche Stücke abträgt, sondern solche, die sich wie p : q : r verhalten.

Anm. Sind p, q, r Irrationalzahlen, so ist die Aufgabe mit Hülfe von §. 107, 6 und §. 110, 2 zu lösen.

B. Von der Aehnlichkeit der Dreiecke und Vielecke.

§. 131. Erklärung.

Zwei necke heißen ähnlich (A ∾ B), wenn sie dieselbe Form haben, d. h. wenn alle Winkel des einen in Größe und Reihenfolge mit den Winkeln des andern übereinstimmen, und wenn ferner die Seiten des einen den gleichliegenden Seiten des andern proportionirt sind. Gleichliegende Seiten sind aber solche Seiten, welche denselben Winkeln gegenüberliegen, oder welchen gleiche Winkelpaare anliegen. (Dieselbe Erklärung gilt für gleichliegende Ecken, Diagonalen u. s. w.)

Anm. Die Möglichkeit, daß zwei necke ähnlich sein können, ergiebt sich aus §. 127. Sind nämlich die Linien mnvw und MNVW gebrochen, so ist amnvw ∾ aMNVW, da die Winkel in Größe und Lage übereinstimmen, und da am : aM = mn : MN = nv : NV = vw : VW = aw : aW ist.

§. 132. Zusatz.

Aus §. 131 ergeben sich folgende Sätze:

1) Zwei congruente necke sind auch ähnlich.

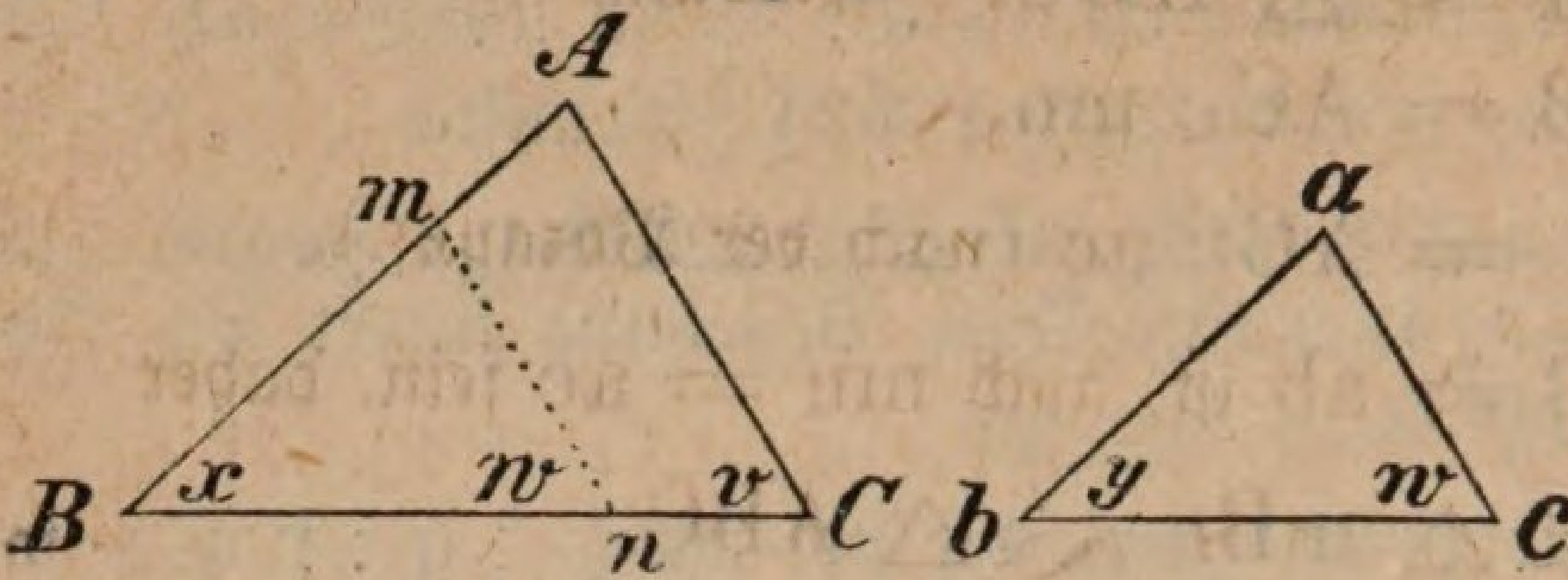
2) Zwei necke sind ähnlich, wenn beide einem dritten ähnlich sind.

3) Zieht man durch zwei Seiten eines Dreiecks eine Linie parallel mit der dritten Seite, so schneidet diese Linie ein Dreieck ab, welches ersterem ähnlich ist (§§. 122 und 125).

§. 133. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in zwei Winkeln übereinstimmen.

Fig. 70.



Vor. $x = y$, $v = w$.

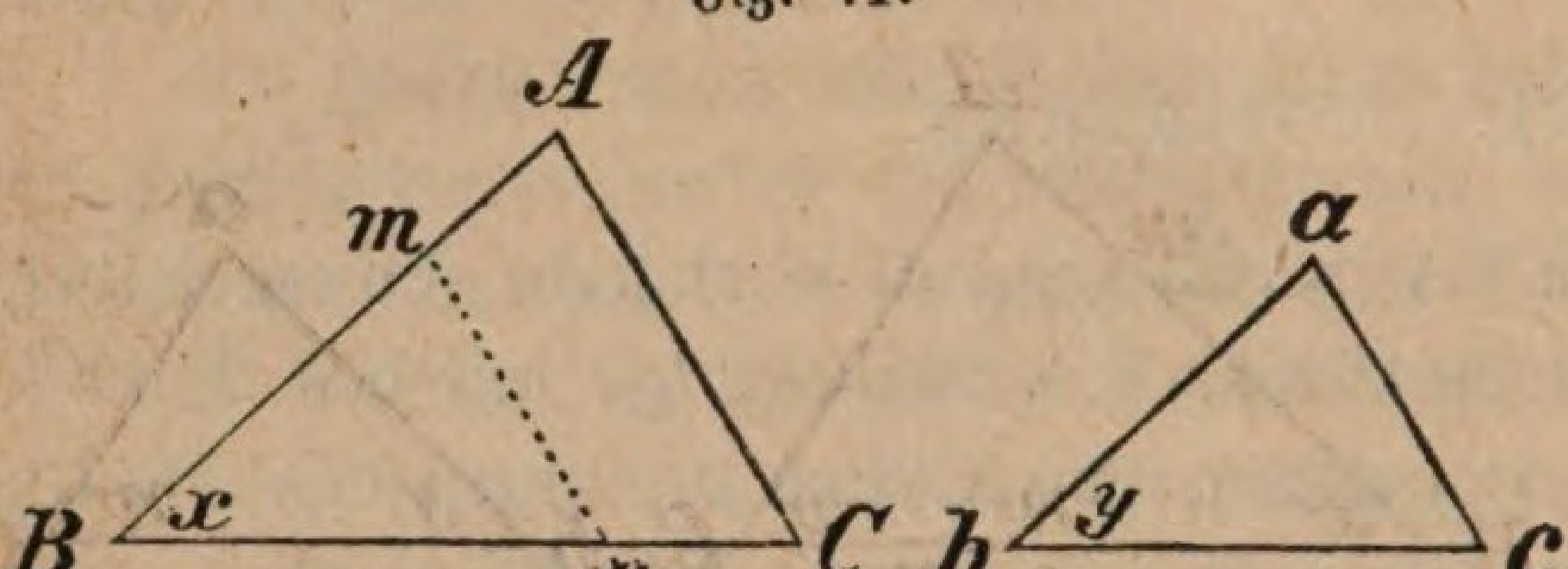
Beh. $\triangle ABC \sim \triangle abc$.*)

Beweis. Denkt man sich $\triangle$ abc so auf $\triangle$ ABC gelegt, daß y auf x, bc der Richtung nach auf BC, ba der Richtung nach auf BA fällt, so erhält $\triangle$ abc die Lage von $\triangle$ mBn. Alsdann ist mn || AC, weil $w = v$ ist, daher $\triangle ABC \sim \triangle mBn \sim \triangle abc$. (§. 132, 3).

§. 134. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in einem Winkel und in dem Verhältnisse der einschließenden Seiten übereinstimmen.

Fig. 71.



Vor. $x = y$;

$AB : ab = BC : bc$.

Beh. $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Beweis. Denkt man sich $\triangle$ abc so auf $\triangle$ ABC gelegt, daß y auf x, bc der Richtung nach auf BC, ba der Richtung nach auf BA fällt, so erhält $\triangle$ abc die Lage von $\triangle$ mBn.

Es ist alsdann nach der Voraussetzung:

$AB : mB = CB : nB$, folglich mn || AC;

daher $\triangle ABC \sim \triangle mBn \sim \triangle abc$.

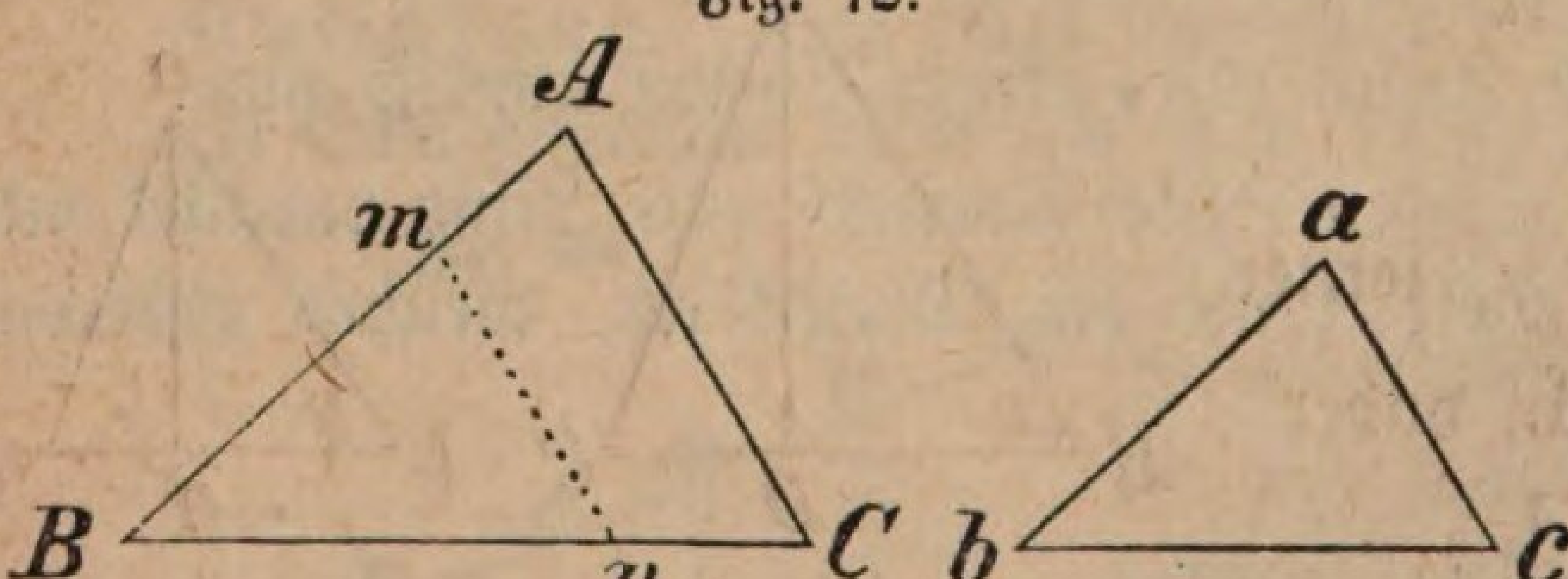
§. 135. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in den Verhältnissen der drei Seiten übereinstimmen.

Vor. $AB : ab = AC : ac = BC : bc$.

Beh. $\triangle ABC \sim \triangle abc$.

Fig. 72.



Beweis. Trägt man auf BC die Linie $Bn = bc$, ferner auf BA die Linie $Bm = ba$ ab, und verbindet man ferner m mit n, so ist nach §. 134

---

*) Bei der Angabe der Aehnlichkeit ordnet man die vorkommenden Buchstaben in der Art, daß die Scheitelbuchstaben gleicher Winkel eine gleiche Stellung erhalten.

$\triangle$ mBn $\sim$ $\triangle$ ABC. Alsdann ist

AB : mB = AC : mn.

Es ist aber auch AB : ab = AC : ac (nach der Vorauss.).

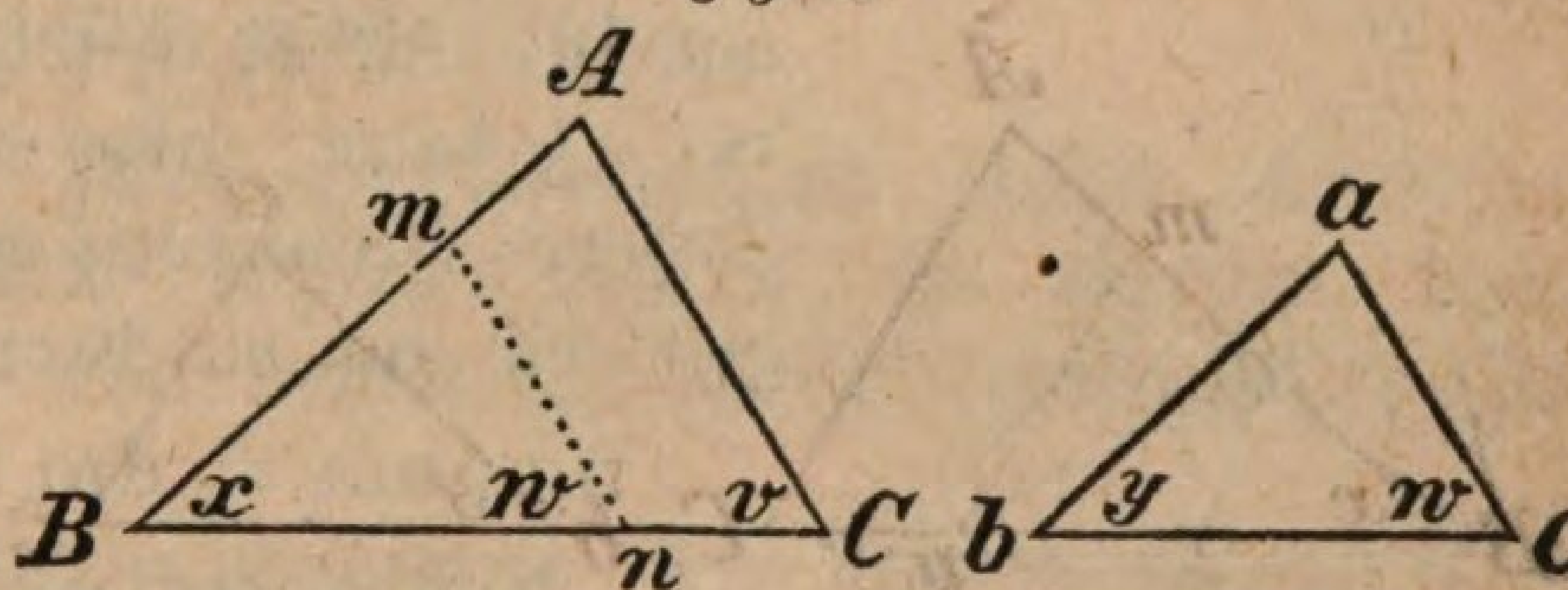
Folglich muß, da mB = ab ist, auch mn = ac sein, daher

$\triangle$ abc $\cong$ $\triangle$ mBn $\sim$ $\triangle$ ABC.

§. 136. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie in dem Verhältnisse zweier Seiten übereinstimmen, und wenn ferner das eine Paar proportionirter Seiten gleiche Gegenwinkel hat, das andere Paar aber gleichartige.*)

Fig. 73.



Vor. AB : ab = AC : ac;

x = y;

v und w sind gleichartig.

Beh. $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ abc.

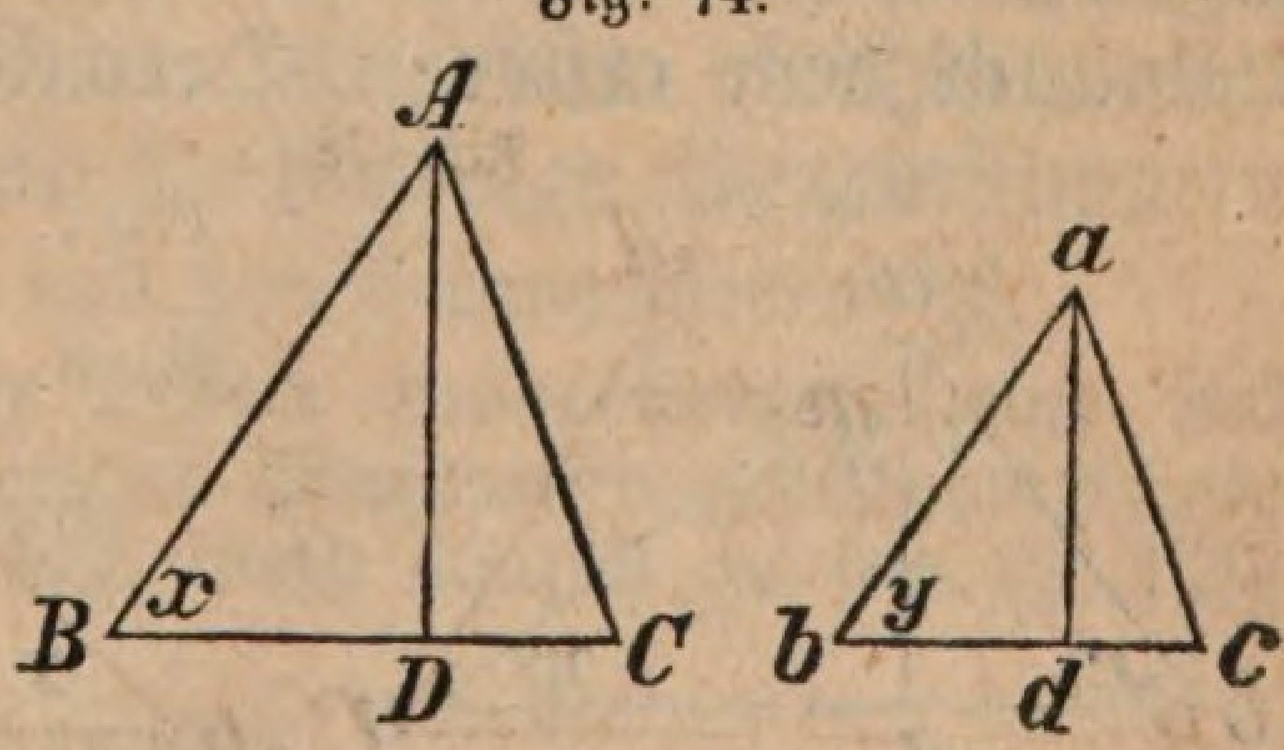
Beweis. Denkt man sich $\triangle$ abc so auf $\triangle$ ABC gelegt, daß y auf x, bc der Richtung nach auf BC, ba der Richtung nach auf BA fällt, so erhält $\triangle$ abc die Lage von $\triangle$ mBn.

Da nun AC : mn = AB : mB ist, ferner die Winkel v und w gleichartig sind, so ist mn || AC (§. 126), folglich $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ mBn $\sim$ $\triangle$ abc.

§. 137. Lehrsatz.

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich zwei gleichliegende Höhen wie zwei gleichliegende Seiten.

Fig. 74.



Vor. $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ abc;

$\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ adb = R.

Beh. AD : ad = AB : ab.

Beweis. Es ist x = y, ferner $\sphericalangle$ ADB = $\sphericalangle$ adb, daher $\triangle$ ABD $\sim$ $\triangle$ abd.

Hieraus folgt aber, daß AD : ad = AB : ab ist.

---

*) Vergleiche §. 31, 2.

§. 138. Zusatz.

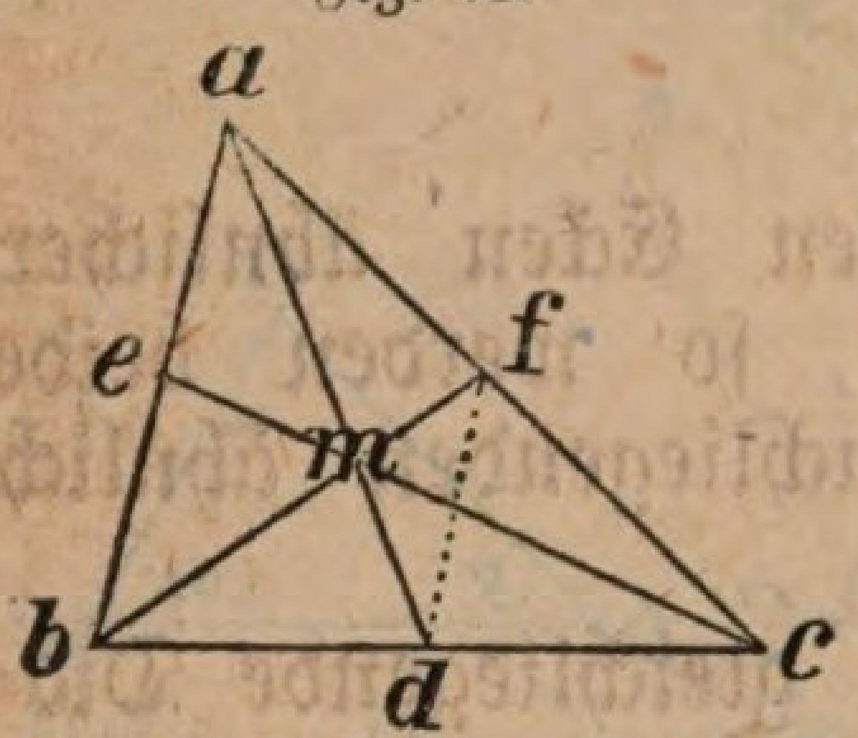
In derselben Art läßt sich nachweisen, daß Linien, die in zwei ähnlichen Dreiecken eine gleiche Lage haben, (Halbirungslinien der Winkel, der Seiten u. s. w.) sich ebenso verhalten, wie zwei gleichliegende Seiten, daß also für alle gleichliegenden Linien ein und dasselbe Verhältniß besteht. (Vergl. §. 32).

§. 139. Lehrsatz.

Verbindet man die Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der Gegenseiten, so schneiden sich diese Linien in einem Punkte und theilen sich gegenseitig nach dem Verhältnisse 1 : 2.

Beweis. Man ziehe zunächst nur zwei dieser Linien, nämlich ad und bf. Alsdann sind f und d die Mitten von ac und bc, und es ist folglich fd || ab, daher △ fmd ∾ △ bma, aber außerdem ist auch $fd = \frac{1}{2}ab$. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke fmd und bma ergiebt sich nun die Proportion

Fig. 75.



$$fm : bm = dm : am = fd : ba = 1 : 2.$$

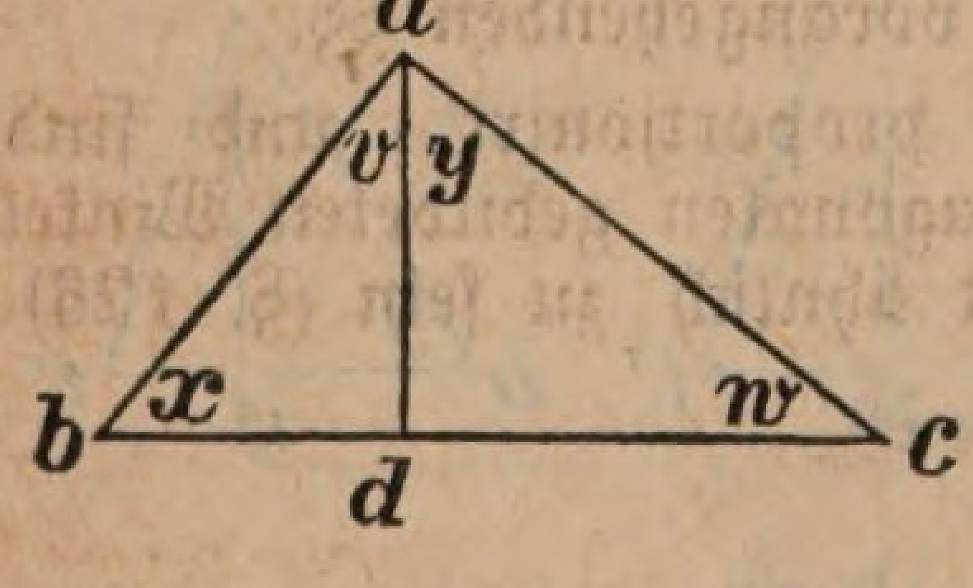
Nach demselben Verhältnisse müssen sich aber auch die Linien ad und bf theilen, und dies kann nur im Punkte m stattfinden, weil am : dm = 2 : 1 ist.

Anm. Der Punkt m heißt der Schwerpunkt des Dreiecks abc.

§. 140. Lehrsatz.

Fällt man aus dem Scheitel eines rechtwinkligen Dreiecks eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so theilt diese Senkrechte das Dreieck in zwei kleinere Dreiecke, welche sowohl untereinander, wie auch dem ersteren Dreiecke ähnlich sind.

Fig. 76.



Vor. ∢ bac = R; ∢ adb = R.

Beh. △ abc ∾ △ dba ∾ △ dac.

Beweis. Es ist

$$x + v = y + v, \text{ daher } x = y;$$
$$v + y = w + y, \text{ daher } v = w.$$

Es ist folglich △ abc ∾ △ dba ∾ △ dac (§. 133).

§. 141. Zusatz.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke abc, dba, dac ergeben sich mehrere wichtige Gleichungen. Es ist nämlich:

1) $ab : bc = db : ba$, daher $ab^2 = bc \,.\, db$;

2) $ac : bc = dc : ac$, daher $ac^2 = bc \,.\, dc$;

3) $da : db = dc : da$, daher $da^2 = db \,.\, dc$.

Jede Cathete ist also die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projection auf die Hypotenuse und der Hypotenuse selbst.

Ferner ist die zur Hypotenuse gehörende Höhe die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

Anm. Durch Addition von 1) und 2) erhält man den Pythagoräischen Lehrsatz. Vergleiche §§. 108 und 109.

§. 142. Lehrsätze.

1) Zieht man aus zwei gleichliegenden Ecken ähnlicher necke Diagonalen nach den übrigen Ecken, so werden beide necke in Dreiecke zerlegt, von denen die gleichliegenden ähnlich sind.

2) In ähnlichen necken verhalten sich gleichliegende Diagonalen wie gleichliegende Seiten, und je zwei gleichliegende Diagonalen schließen gleiche Winkel ein und schneiden ähnliche Figuren ab.

3) Zwei ähnliche necke lassen sich so auf einander gelegt denken, daß alle gleichliegenden Seiten entweder aufeinander fallen, oder parallel sind.

4) Zwei necke sind ähnlich, wenn in beiden die gleichliegenden Seiten und die aus einer gleichliegenden Ecke gezogenen Diagonalen proportionirt sind.

5) Zwei necke sind ähnlich, wenn in beiden die Umfangswinkel, ferner die von den Diagonalen an einer gleichliegenden Ecke gebildeten Winkel in Größe und Reihenfolge übereinstimmen.

Anm. 1. Die Beweise ergeben sich aus den vorangehenden §§.

Anm. 2. Sind in zwei necken die Seiten proportionirt, und sind ferner die an einer gleichliegenden Ecke von den Diagonalen gebildeten Winkel beziehlich einander gleich, so brauchen die necke nicht ähnlich zu sein (§. 126).

§. 143. Lehrsätze.

Reguläre necke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich. Ferner verhalten sich die Seiten wie die Radien der eingeschriebenen und wie die Radien der umgeschriebenen Kreise.

Beweis. Die Aehnlichkeit folgt aus der in §. 52 gegebenen Erklärung. Zieht man nun aus dem Mittelpunkte eines jeden der beiden necke Radien nach allen Ecken, so entstehen n congruente Dreiecke. Dieselben haben in beiden Figuren dieselben Winkel, sind also ähnlich. In zwei Dreiecken, die nicht dem nämlichen neck angehören, verhalten sich daher die necksseiten wie die Radien der umgeschriebenen Kreise, oder auch wie die Höhen, d. h. wie die Radien der eingeschriebenen Kreise.

§. 144. Lehrsätze.

1) Die Umfänge ähnlicher necke verhalten sich wie zwei gleichliegende Seiten.

Beweis. Werden die Seiten beider necke bezeichnet durch A, B, C, D... und a, b, c, d..., so ist $A : a = B : b = C : c = D : d = \ldots$, daher $(A+B+C+D+\ldots):(a+b+c+d+\ldots) = A:a = B:b$ u. s. w.

2) Die Umfänge regulärer necke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien der eingeschriebenen und wie die Radien der umgeschriebenen Kreise.

Beweis. Er ergiebt sich aus 1 und aus §. 143.

§. 145. Lehrsätze.

1) Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten.

Beweis. Verhalten sich zwei gleichliegende Seiten A und a wie m zu n, so verhalten sich die zugehörigen Höhen H und h ebenso. Es ist daher

$$A : a = m : n,$$

$$H : h = m : n,$$

$$\frac{AH}{2} : \frac{ah}{2} = m^2 : n^2 = A^2 : a^2.$$

2) Die Inhalte zweier ähnlichen necke verhalten sich wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten.

Beweis. Zieht man in beiden necken aus zwei gleichliegenden Ecken Diagonalen nach den übrigen Ecken, so sind je zwei gleichliegende Dreiecke ähnlich und verhalten sich wie die Quadrate gleichliegender Seiten (nach 1). Für je zwei gleichliegende Dreiecke besteht also dasselbe Verhältniß, folglich auch für die Summen dieser Dreiecke oder für die erwähnten necke.

3) Die Inhalte zweier regulären necke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der Radien der eingeschriebenen, oder der umgeschriebenen Kreise.

Beweis. Er ergiebt sich aus 2 und aus §. 143.

§. 146. Lehrsatz.

Wenn je drei gleichliegende Seiten dreier ähnlichen necke sich zu einem rechtwinkligen Dreiecke zusammensetzen lassen, so ist das eine neck gleich der Summe der beiden anderen.

Beweis. Sind A, B, C die Inhalte der drei necke, a, b, c drei gleichliegende Seiten, und ist $c^2 = a^2 + b^2$, so ergiebt sich:

1) $C : B = c^2 : b^2$ (§. 145);

2) $A : B = a^2 : b^2$, daher

$(A + B) : B = (a^2 + b^2) : b^2$, oder

3) $(A + B) : B = c^2 : b^2$.

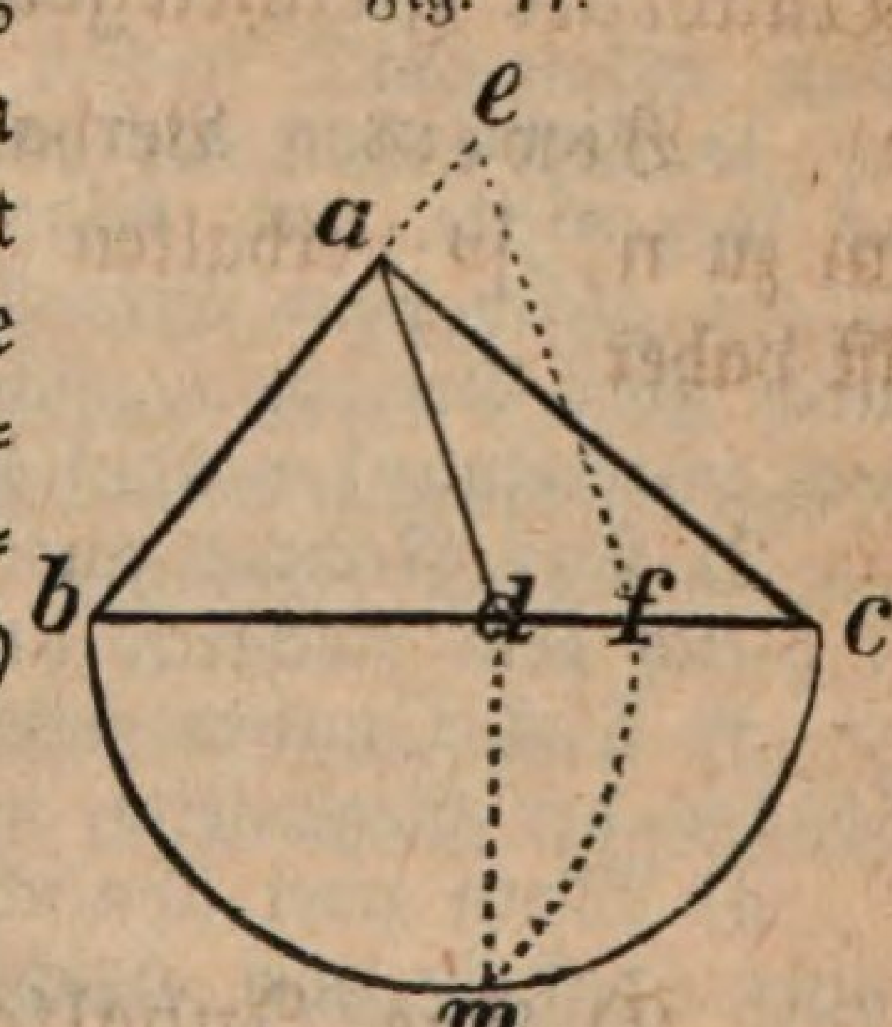
Aus 3) und 1) folgt aber, daß $A + B = C$ ist.

Anm. Aus diesem Satze, der eine Erweiterung des Pythagoräischen Lehrsatzes ist, ergiebt sich leicht eine Construction zur Addition oder Subtraction ähnlicher necke.

§. 147. Aufgaben.

1) Ein gegebenes Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einem zweiten gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Fig. 77.



Analysis. Man verwandele zunächst das erste gegebene Dreieck in ein solches, welches mit dem zweiten gegebenen einen Winkel gemeinschaftlich hat (§. 83, 2), und gebe zugleich dem letzteren eine solche Größe, daß es mit ersterem in einer Seite übereinstimmt. Es sei nun (Fig. 77) abc das bereits umgeänderte Dreieck, abd dasjenige, dem es ähnlich werden soll, und ebf sei das gesuchte.

Alsdann ist 1) $\triangle\, ebf = \triangle\, abc$,

ferner 2) $\triangle\, ebf \sim \triangle\, abd$.

Nun ist nach 2) $\triangle\, abd : \triangle\, ebf = bd^2 : bf^2$,

außerdem aber $\triangle\, abd : \triangle\, abc = bd : bc$.

Da jedoch $\triangle\, abc = \triangle\, ebf$ ist, so muß auch

$bd^2 : bf^2 = bd : bc$, oder

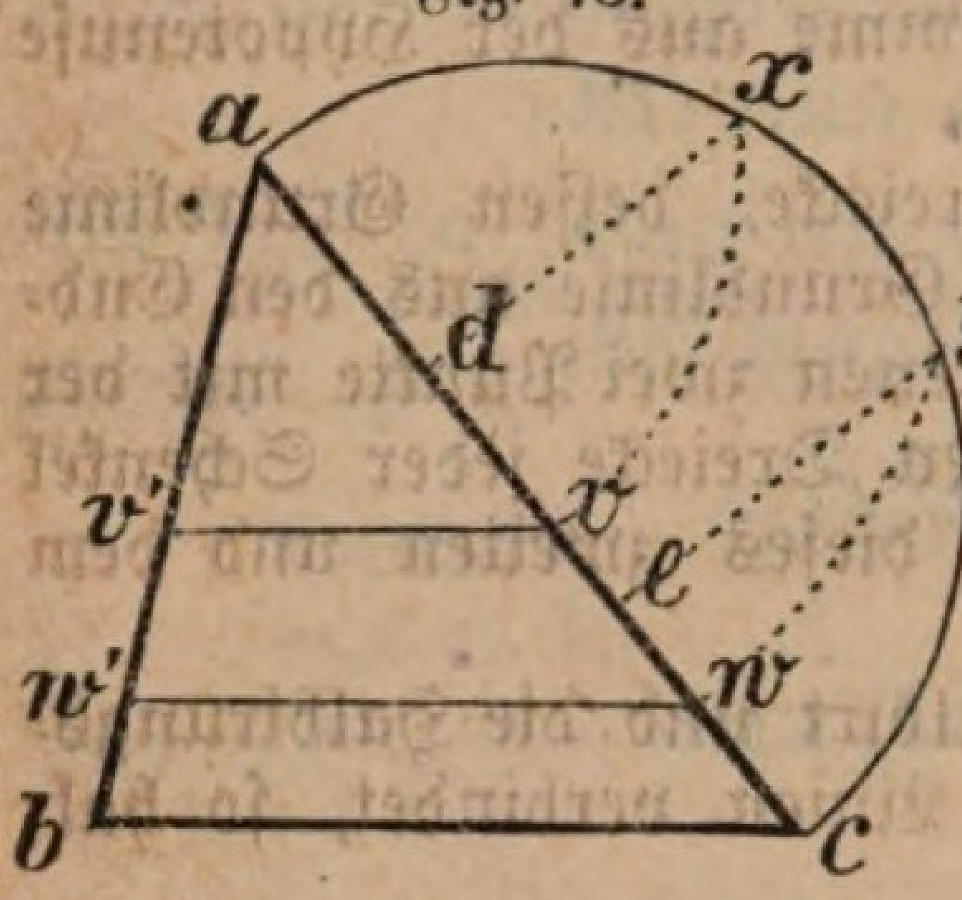
$bf^2 = bd \,.\, bc$ sein.

Construction. Man bestimme die mittlere Proportionale zwischen bd und bc, indem man über bc einen Halbkreis beschreibt, aus d die Senkrechte dm errichtet und b mit m verbunden denkt. Trägt man nun bm = bf auf bc ab und zieht fe || da, so ist △ ebf das gesuchte.

Beweis. Er ergiebt sich aus der Analysis.

2) Ein gegebenes Dreieck durch Linien, welche einer der Dreiecksseiten parallel gehen, in drei (m) gleiche Theile zu zerlegen.

Fig. 78.



Auflösung. Man theile das Dreieck abc zunächst durch Linien, welche aus der Ecke b gezogen werden, in drei gleiche Theile, indem man die Seite ac in die drei gleichen Theile ad, de und ec zerlegt und dann d und e mit b verbunden denkt. Verwandelt man nun die Dreiecke abd und abe so, daß sie dem Dreiecke abc ähnlich werden (nach 1), so ist die Aufgabe gelöst. Man beschreibt also über ac einen Halbkreis, errichtet aus d und e die Senkrechten dx und ey, trägt ax = av, ferner ay = aw auf ac ab, zieht endlich aus v und w die Linien vv' und ww' parallel bc, so sind av'v, v'vw'w, w'wbc die gesuchten drei Theile.

Anm. zu 2). Es ist $av'v : aw'w : abc = 1 : 2 : 3$,

aber auch $av'v : aw'w : abc = av^2 : aw^2 : ac^2$,

daher $av : aw : ac = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Uebungssätze.

1) Zieht man aus einer Ecke eines Dreiecks zwei gleich große Linien nach der Gegenseite, und bildet jede derselben mit der Gegenseite einen Winkel, welcher gleich dem Dreieckswinkel an der erwähnten Ecke ist, so werden dadurch zwei Dreiecke abgeschnitten, welche dem ursprünglichen Dreiecke und daher auch untereinander ähnlich sind.

2) Das Rechteck aus einer jener Linien und der erwähnten Gegenseite ist gleich dem Rechtecke aus den beiden anderen Seiten des Dreiecks.

3) Das Quadrat einer solchen Linie ist gleich dem Rechtecke aus den Stücken der Gegenseite, welche von beiden Linien abgeschnitten werden.

4) Wenn zwei ähnliche Dreiecke von verschiedener Größe eine solche Lage haben, daß je zwei gleichliegende Seiten auch parallel sind, so schneiden sich die Verbindungslinien je zweier gleichliegenden Ecken in einem Punkte.

5) Wenn man in einem Dreiecke Linien aus den Winkelspitzen nach den Mitten der Gegenseiten zieht und jede über die Seite hinaus um den dritten Theil ihrer eigenen Größe verlängert, dann die drei Endpunkte verbindet, so entsteht ein Dreieck, welches dem gegebenen congruent ist, und dessen Seiten durch obige Linien halbirt werden.

6) Verbindet man die Spitzen zweier Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie haben, durch eine Gerade und verlängert dieselbe, wenn es nöthig

ist, bis sie die Grundlinie oder die Verlängerung derselben schneidet, so verhalten sich die Stücke dieser Linie, welche zwischen je einer Spitze und der Grundlinie liegen, wie die Flächenräume der Dreiecke.

7) Zieht man durch zwei Dreiecke, welche eine gemeinschaftliche Grundlinie und gleiche Höhe haben, eine Linie parallel mit der Grundlinie, so sind von dieser Parallelen die zwei Stücke, welche innerhalb der beiden Dreiecke liegen, gleich groß.

8) Zieht man durch den Halbirungspunkt der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks eine Linie bis zum Durchschnitte mit dem einen Schenkel und der Verlängerung des andern, so ist dieselbe stets größer als die dritte Seite.

9) In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist die Summe aus der Hypotenuse und der Höhe größer als die Summe der Catheten.

10) Trägt man in einem gleichschenkligen Dreiecke, dessen Grundlinie größer als der Schenkel ist, beide Schenkel auf der Grundlinie aus den Endpunkten der letzteren ab und verbindet die so erhaltenen zwei Punkte mit der Spitze, so ist in dem so entstandenen gleichschenkligen Dreiecke jeder Schenkel die mittlere Proportionale zwischen der Grundlinie dieses zweiten und dem Schenkel des ersten Dreiecks.

11) Wenn man in einem Vierecke alle Seiten halbirt und die Halbirungspunkte der gegenüberstehenden Seiten durch gerade Linien verbindet, so halbiren sich diese Verbindungslinien.

12) Wenn man in einem Vierecke zwei gegenüberliegende Seiten und auch die beiden Diagonalen halbirt und die Halbirungspunkte durch gerade Linien verbindet, so entsteht ein Parallelogramm, dessen Umfang so groß, wie die Summe der beiden nicht halbirten Linien ist.

13) Wenn man in einem Trapeze die beiden parallelen Seiten halbirt und die Halbirungspunkte verbindet, so geht diese Verbindungslinie durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen.

14) Verbindet man in einem Trapeze den Durchschnittspunkt der nicht parallelen Seiten mit dem Durchschnittspunkte der Diagonalen, so werden durch diese Linien die beiden parallelen Seiten halbirt.

15) Halbirt man in einem Trapeze eine der beiden Diagonalen und zieht durch den Halbirungspunkt eine Parallele zu den parallelen Seiten, so halbirt diese auch die andere Diagonale.

16) Die geometrische mittlere Proportionale zwischen zwei gegebenen ungleichen Linien ist immer kleiner als die halbe Summe dieser Linien.

17) Durch einen außerhalb zweier convergirenden Linien gegebenen Punkt eine Linie so zu legen, daß sich diese drei Linien bei gehöriger Verlängerung in einem Punkte schneiden.

18) Durch einen zwischen den Schenkeln eines Winkels gegebenen Punkt eine Gerade so zu ziehen, daß sie in diesem Punkte nach einem gegebenen Verhältnisse getheilt wird.

19) Ein Dreieck durch eine Linie zu halbiren, welche parallel mit einer gegebenen Linie ist.

20) Ein Dreieck durch Linien, welche parallel einer beliebigen Geraden gehen, in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

21) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Grundlinie und die aus den Ecken derselben nach den Mitten der zwei anderen Seiten gezogenen Linien gegeben sind.

22) Ein Dreieck zu construiren, wenn die aus den Ecken nach den Mitten der Gegenseiten gezogenen Linien gegeben sind.

23) Ein Dreieck aus den drei Höhen zu construiren.*)

24) Ein Quadrat in ein Dreieck zu verwandeln, zu dem die Winkel gegeben sind.

25) Zwei gerade Linien sind der Lage nach gegeben. Den geometrischen Ort des Punktes zu finden, dessen senkrechte Abstände von beiden Linien ein gegebenes Verhältniß zu einander haben.

26) In der Grundlinie eines Dreiecks einen Punkt der Art zu bestimmen, daß die Linien, die man aus demselben nach den beiden Seiten unter gleichen Winkeln zieht, ein gegebenes Verhältniß haben.

27) Zwei gerade Linien ab und ac sind der Größe und Lage nach gegeben. Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, dessen Verbindungslinien mit a, b und c jedesmal zwei Dreiecke von bestimmtem Inhaltsverhältnisse bilden.

28) Es ist ein Dreieck gegeben. Einen Punkt der Art zu finden, daß die aus demselben nach den drei Seiten gezogenen Senkrechten ein bestimmtes Verhältniß zu einander haben.

29) Ein ungleichseitiges Dreieck in ein gleichseitiges zu verwandeln.

30) Ein Dreieck ist gegeben und eine gerade Linie ab der Lage nach. Durch eine mit ab parallele Linie das Dreieck in zwei Theile zu theilen, die sich wie zwei gegebene Linien m und n verhalten.

31) Es ist ein neck gegeben. Ein demselben ähnliches zu construiren, so daß die Umfänge beider sich verhalten, wie zwei gegebene Linien p und q.

32) Zu einem necke ein ähnliches von gegebenem Inhalte zu zeichnen.

33) Ein Dreieck aus der Grundlinie, dem Verhältnisse der beiden andern Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel zu construiren.

34) Ein rechtwinkliges Dreieck aus dem Verhältnisse der Summe beider Catheten zur Hypotenuse und aus dem Inhalte zu construiren.

35) In einem Dreiecke abc eine zur Grundlinie bc parallele Linie so zu ziehen, daß das von ab unten abgeschnittene Stück gleich dem von ac oben abgeschnittenen Stücke wird.

36) Zu einem Vierecke sind gegeben eine Seite und die beiden derselben anliegenden Winkel; es soll dasselbe so beschrieben werden, daß die drei übrigen Seiten desselben gleich groß werden.**)

37) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Summe der ersten und dritten Seite, die Summe der zweiten und dritten Seite, und der von der ersten und zweiten Seite eingeschlossene Winkel gegeben sind.***)

38) Ein Dreieck zu construiren, wenn die Differenz der ersten und dritten, die Differenz der zweiten und dritten Seite, und der der kleinsten Seite gegenüberliegende Winkel gegeben sind.

39) Ein Viereck zu construiren aus einer Diagonale und den vier Winkeln, welche an der andern liegen.

---

*) Auflösung. Man construirt ein Dreieck aus den drei Höhen als Seiten, und darauf ein zweites aus den Höhen des ersteren. Dieses zweite Dreieck ist dem gesuchten ähnlich.

**) Auflösung. Man zeichnet zuerst aus den drei gleichen Seiten, deren Größe man beliebig annimmt, und aus den zwei Winkeln ein Viereck. Dieses ist dem gesuchten ähnlich.

***) 37) und 38) werden mit Hülfe von 36) gelöst.

Dreizehntes Capitel.

Von den Proportionen beim Kreise.

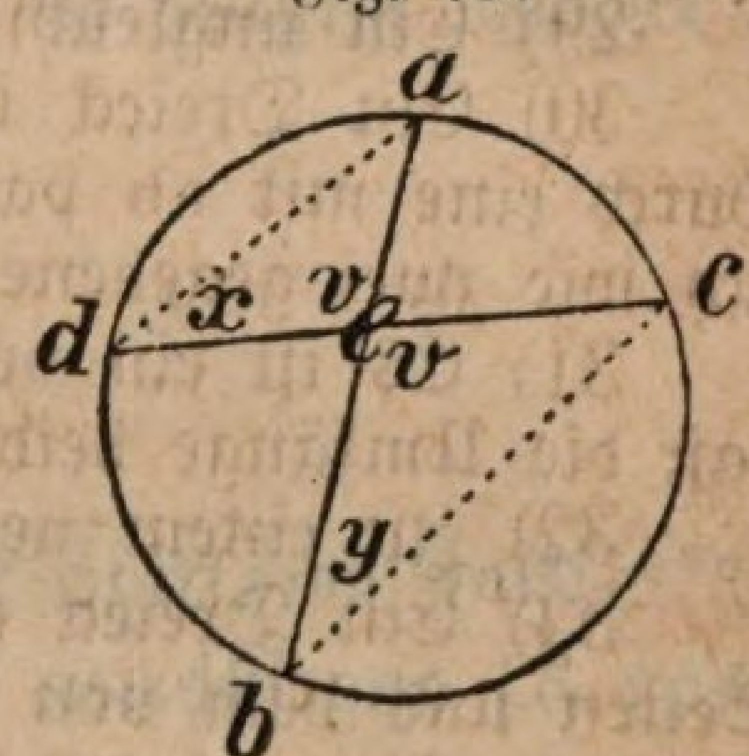
§. 148. Lehrsatz.

Schneiden sich zwei demselben Kreise angehörende Geraden, (Sehnen, Secanten, Tangenten), so bilden die zwischen Durchschnittspunkt und Peripherie liegenden Abschnitte der einen die Proportionalen zwischen den Abschnitten der anderen, oder das Rechteck aus den Abschnitten der einen ist gleich dem Rechtecke aus den Abschnitten der anderen.

Es sind drei Fälle möglich.

1) Zwei Sehnen schneiden sich (Fig. 79).

Fig. 79.

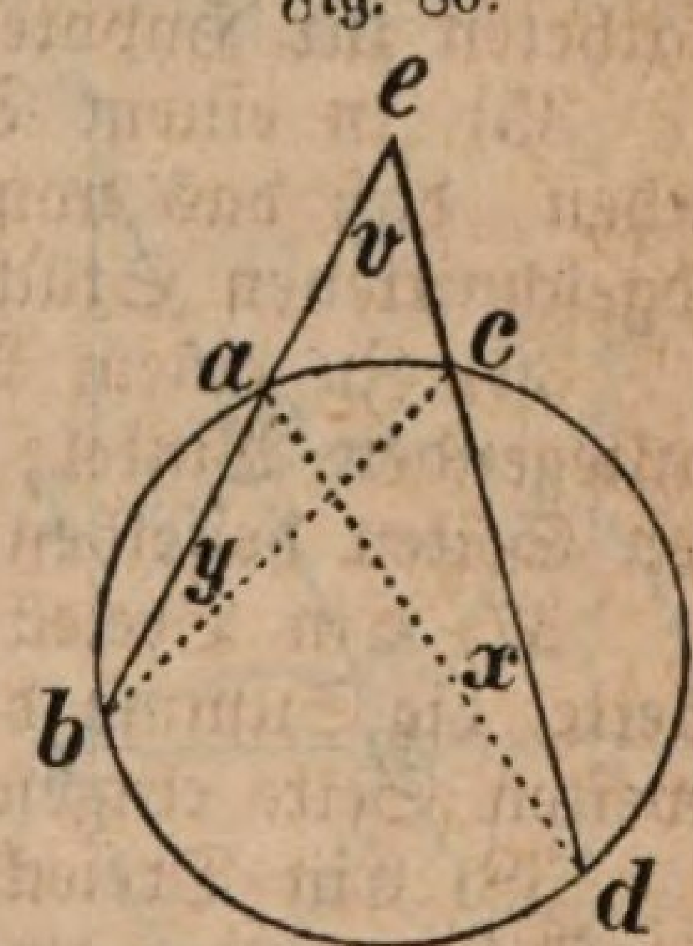


Beh. ea : ed = ec : eb.

Beweis. Es ist x = y, v = v, daher
$\triangle$ ead $\sim$ $\triangle$ ecb, folglich
ea : ed = ec : eb, oder
ea . eb = ec . ed.

2) Zwei Secanten schneiden sich (Fig. 80).

Fig. 80.

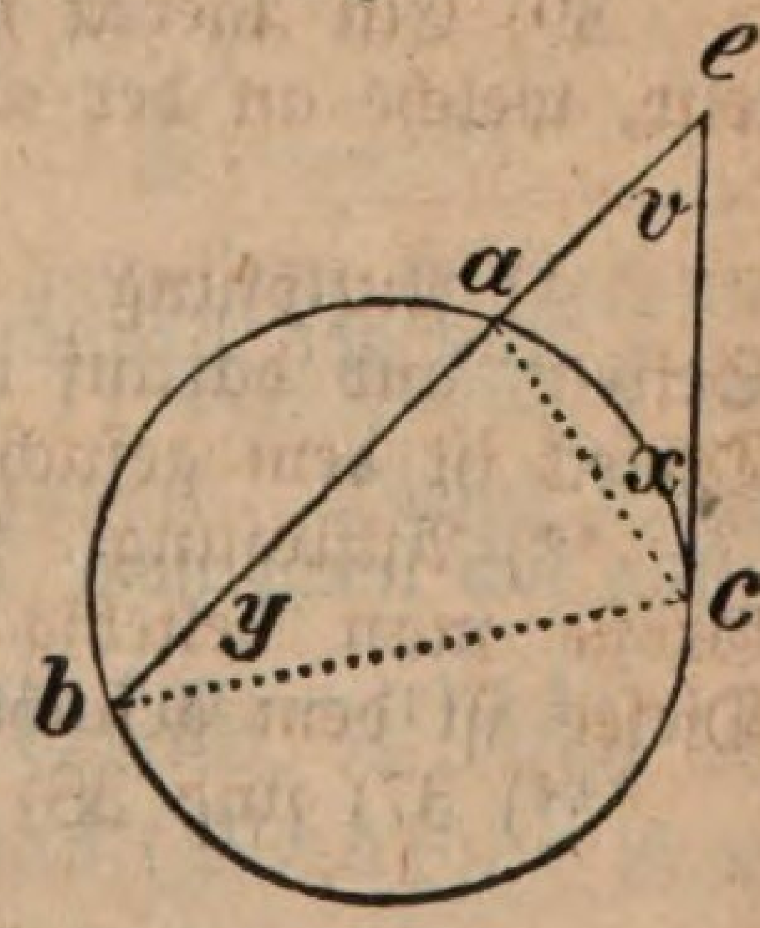


Beh. ea : ed = ec : eb.

Beweis. Es ist x = y, v = v, daher
$\triangle$ ead $\sim$ ecb, folglich
ea : ed = ec : eb, oder
ea . eb = ec . ed.

3) Eine Secante und eine Tangente schneiden sich (Fig. 81).

Fig. 81.



Beh. ea : ec = ec : eb.

Beweis. Es ist x = y*), v = v, daher
$\triangle$ eac $\sim$ $\triangle$ ecb, folglich
ea : ec = ec : eb, oder
ea . eb = ec^2.

*) §. 70.

Anm. 1. Schneiden sich zwei Tangenten, so sind dieselben gleich groß, und der Satz ist also auch in diesem Falle richtig.

Anm. 2. Wenn man berücksichtigt, daß in dem unter 3) angegebenen Falle die beiden Durchschnittspunkte c und d im Berührungspunkte c zusammenfallen, so sind die drei gegebenen Beweise vollständig gleichlautend.

Anm. 3. Der Lehrsatz läßt sich umkehren. Der Beweis wird alsdann indirekt geführt.

§. 149. Erklärung.

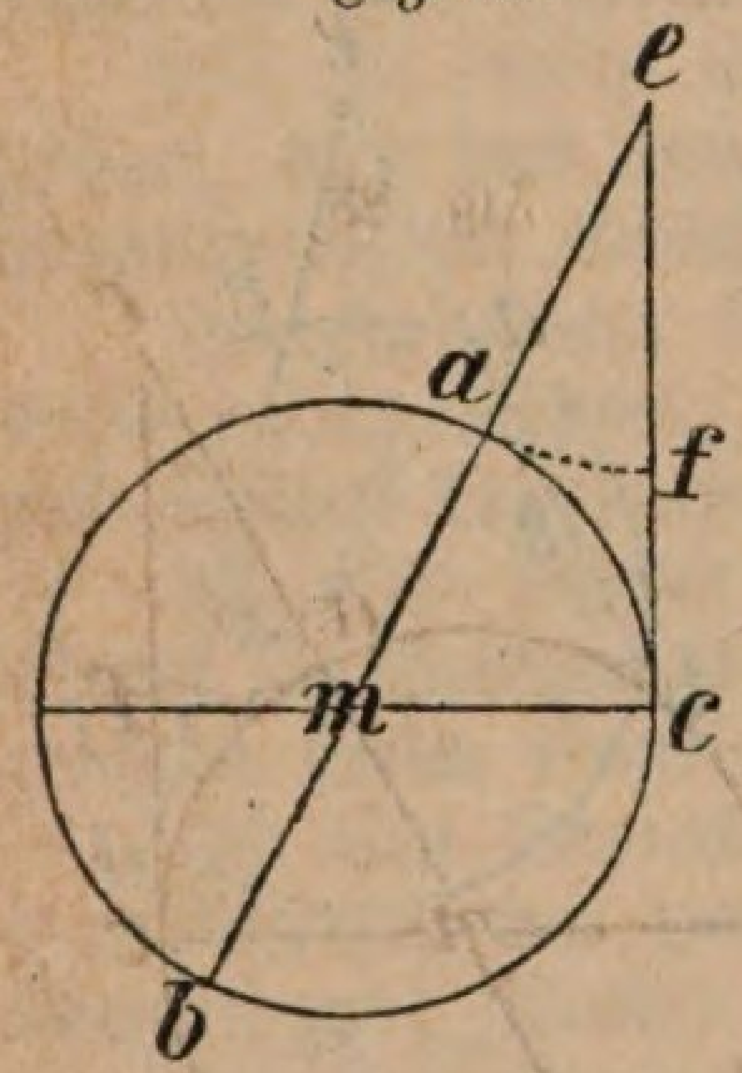
Eine Linie heißt nach **stetiger Proportion** geschnitten (getheilt), wenn sich der kleinere Abschnitt zum größeren verhält, wie der größere zur ganzen Linie. Bezeichnet man den kleineren Abschnitt durch m, den größeren durch n, so entsteht folglich die Proportion

$$m : n = n : (m + n).$$

§. 150. Zusatz.

Eine derartige Proportion erhält man als besonderen Fall aus der unter 3) angeführten Proportion des §. 148.

Fig. 82.



Ist nämlich (Fig. 81 und 82)

bae ein verlängerter Durchmesser,

ferner ec gleich dem Durchmesser,

so geht die Proportion

$$ea : ec = ec : eb \text{ über in}$$

$$ea : ab = ab : eb,$$

und die Linie eab ist also im Punkte a nach stetiger Proportion geschnitten.

§. 151. Zusatz.

Aus der Proportion

$$m : n = n : (m + n)$$

lassen sich leicht neue Proportionen von gleicher Form ableiten, nämlich:

1) $(n - m) : m = [(m + n) - n] : n$, oder $(n - m) : m = m : n$;

2) $n : (m + n) = (m + n) : [n + (m + n)]$, oder

$$n : (n + m) = (n + m) : (2n + m).$$

Trägt man also den kleineren Abschnitt m einer nach stetiger Proportion getheilten Linie (m + n) auf dem größeren Abschnitte n ab, so wird dieser ähnlich getheilt, und es wird hierbei m zum größeren Abschnitte (nach 1). Da man dieses Abtragen unendlich oft wiederholen kann, so sind die drei Größen m, n (m + n) incommensurabel. (Vergl. Arith. I, §. 63.)

Verlängert man umgekehrt die Linie (m + n) um den größeren Abschnitt n, so ist die verlängerte Linie ebenfalls nach stetiger Proportion getheilt, und zwar bildet alsdann (m + n) den größeren, n den kleineren Abschnitt (nach 2). Auch diese Art des Verfahrens läßt sich beliebig oft wiederholen.

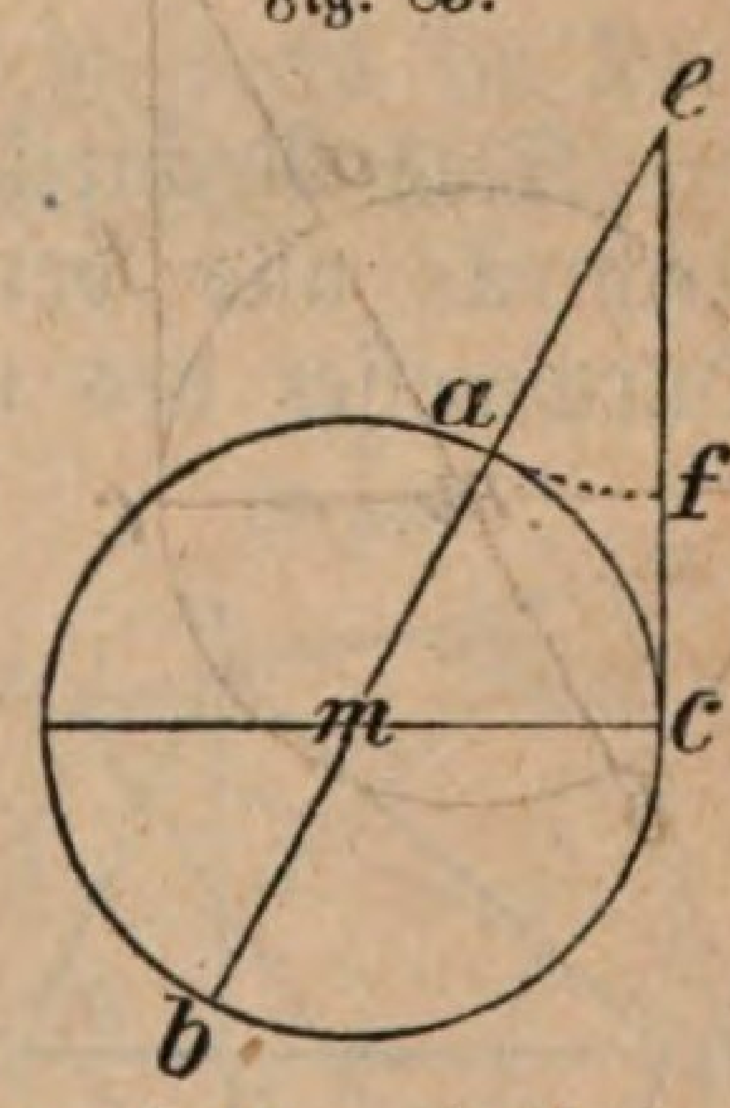
In Fig. 82 ist ea der kleinere, ab = ec der größere Abschnitt; wird also ea auf ec abgetragen, und ist ef = ea, so wird die Linie efc im Punkte f nach stetiger Proportion getheilt, und ef ist der größere Abschnitt.

§. 152. Aufgaben.

1) Eine gegebene Linie ec nach stetiger Proportion zu schneiden (Goldener Schnitt, sectio aurea oder divina).

2) Zu dem größeren (kleineren) Abschnitte einer nach stetiger Proportion getheilten Linie den anderen Abschnitt zu finden.

Fig. 83.



Auflösung zu 1. In beistehender Figur, welche mit Fig. 82 übereinstimmt, ist ec im Punkte f nach stetiger Proportion geschnitten, sobald $\sphericalangle$ ecm = R, mc = $\frac{1}{2}$ec, ef = ea ist. Um die gegebene Linie ec nach stetiger Proportion zu schneiden, construirt man also das rechtwinklige Dreieck ecm, in welchem mc = $\frac{1}{2}$ec ist, trägt ferner ma = mc auf me ab, endlich ef = ea auf ec. Alsdann ist ef der größere, fc der kleinere Abschnitt.

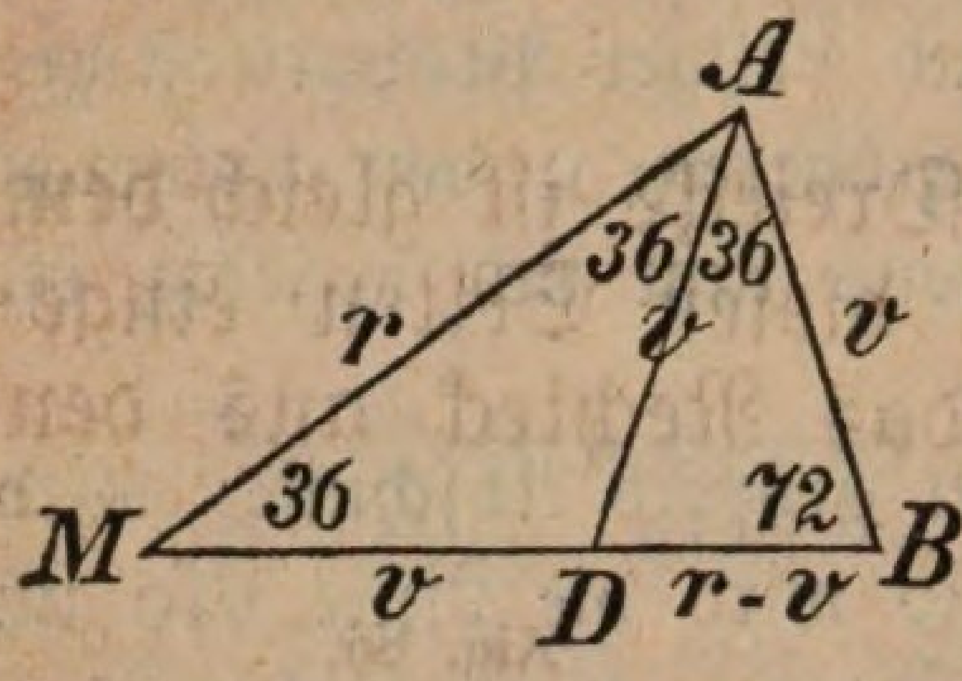
Auflösung zu 2. Bezeichnet ec (Fig. 83) den größeren Abschnitt einer nach stetiger Proportion getheilten (unbekannten) Linie, so erhält man letztere, indem man (nach 1) den Punkt f bestimmt, dann ce über e hinaus um das Stück ef verlängert. Dieses Stück bildet alsdann den gesuchten kleineren Abschnitt.

Bezeichnet endlich ec einen gegebenen kleineren Abschnitt, so bildet die Linie (fe + ec) den (unbekannten) größeren Abschnitt (§. 151). Auch in diesem Falle ist also zunächst der Punkt f zu bestimmen (nach 1).

§. 153. Lehrsatz.

Trägt man die Seite des regulären Zehnecks im Kreise auf dem Radius ab, so wird dieser dadurch nach stetiger Proportion geschnitten.

Fig. 84.



Beweis. Es sei AB = v die Zehnecksseite, MA = r ein Radius, ebenso MB, so ist $\sphericalangle$ MAB = $\sphericalangle$ MBA = 72°.

Halbirt man nun $\sphericalangle$ MAB, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke DMA und ADB. Es ist alsdann

$$MD = AD = AB = v, \; DB = r - v.$$

Da nun $\sphericalangle$ MAB halbirt ist, so folgt aus §. 128, daß

$$MD : BD = AM : AB,$$ oder daß

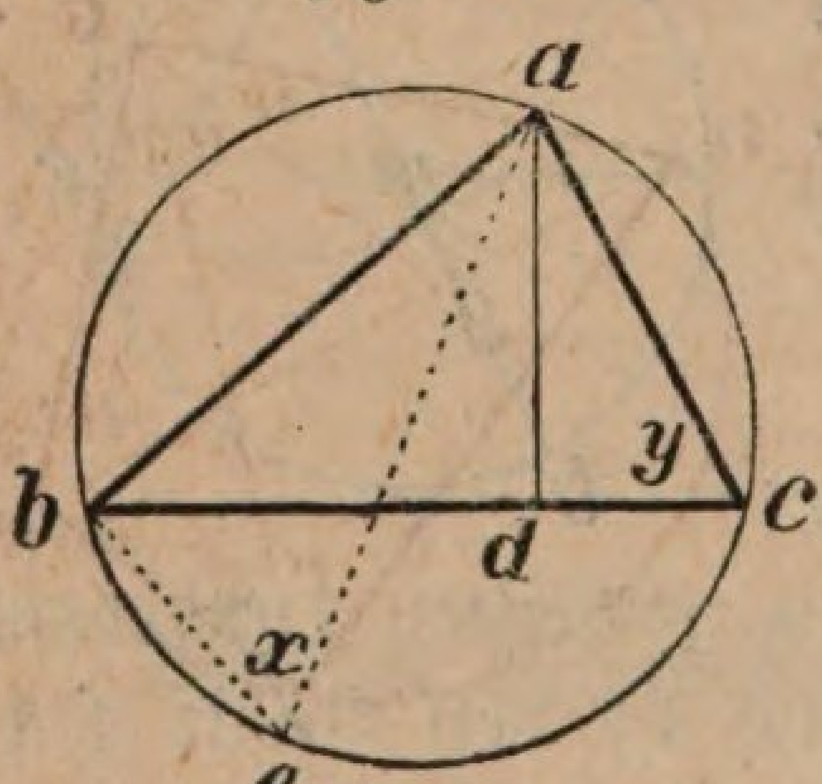
$$v : (r - v) = r : v$$ ist.

Der Radius wird also durch Abtragen der Zehnecksseite nach stetiger Proportion geschnitten. Nach vorigem §. läßt sich daher die Zehnecksseite, folglich auch die Fünfecksseite, aus dem Radius bestimmen, ebenso der Radius aus der Zehnecksseite, und ferner lassen sich die Winkel von 36° und 72° geometrisch construiren.

§. 154. Lehrsatz.

Das Rechteck aus zwei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus der zur dritten Seite gehörigen Höhe und dem Durchmesser des umgeschriebenen Kreises.

Fig. 85.



Beweis. Es sei ad eine Höhe des Dreiecks abc, ae der Durchmesser des umgeschriebenen Kreises, so ist zu zeigen, daß

$$ab \,.\, ac = ad \,.\, ae$$ ist.

Nun ist x = y, $\sphericalangle$ abe = $\sphericalangle$ adc (= R), folglich $\triangle$ abe $\sim$ $\triangle$ adc.

Hieraus ergiebt sich, daß

$$ab : ad = ae : ac,$$ oder daß

$$ab \,.\, ac = ad \,.\, ae$$ ist.

Anm. Sind m, n, o die Seiten eines Dreiecks, ist h die zu o gehörende Höhe, I der Inhalt des Dreiecks, r der Radius des umgeschriebenen Kreises,

so ist also $m \cdot n = 2r \cdot h$, folglich

$$m \cdot n \cdot o = 2r \cdot h \cdot o = 4r \cdot I, \text{ daher}$$

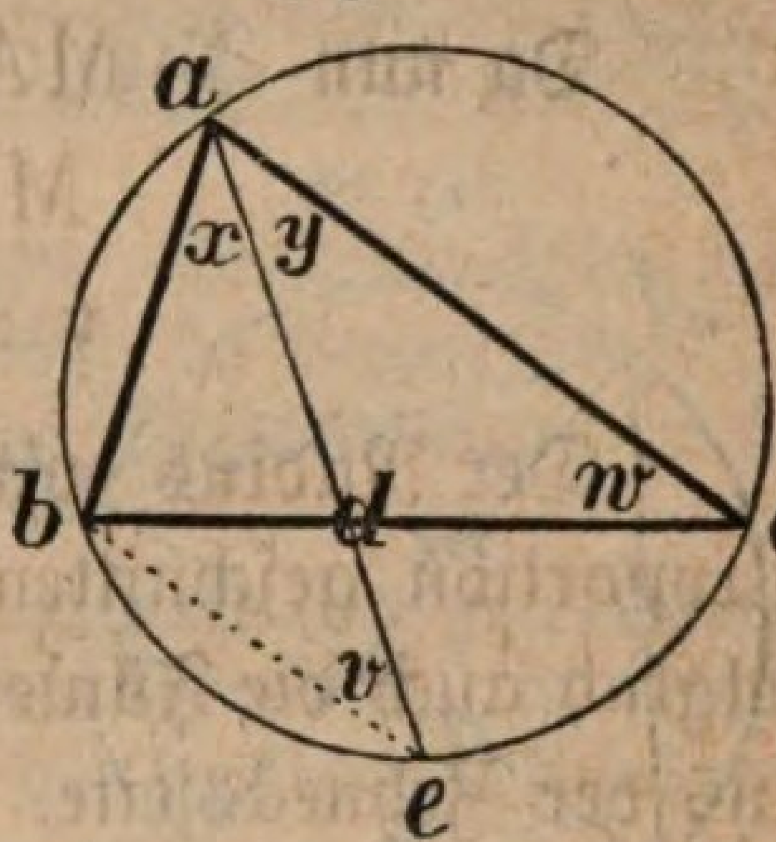
$$I = \frac{m \cdot n \cdot o}{4r},$$

$$r = \frac{m \cdot n \cdot o}{4I} = \frac{m \cdot n \cdot o}{\sqrt{SABC}} \text{ (§. 117).}$$

§. 155. Lehrsatz.

Das Rechteck aus zwei Seiten eines Dreiecks ist gleich dem Quadrate über der Linie, welche den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel halbirt, vermehrt um das Rechteck aus den Abschnitten der dritten Seite.

Fig. 86.



Vor. $x = y$.

Beh. $ab \cdot ac = ad^2 + bd \cdot dc$.

Beweis. Beschreibt man um abc einen Kreis und verlängert ad bis e, so ist $x = y$, $v = w$, folglich $\triangle\, abe \sim \triangle\, adc$.

Es ist deshalb

$$ab : ae = ad : ac,$$

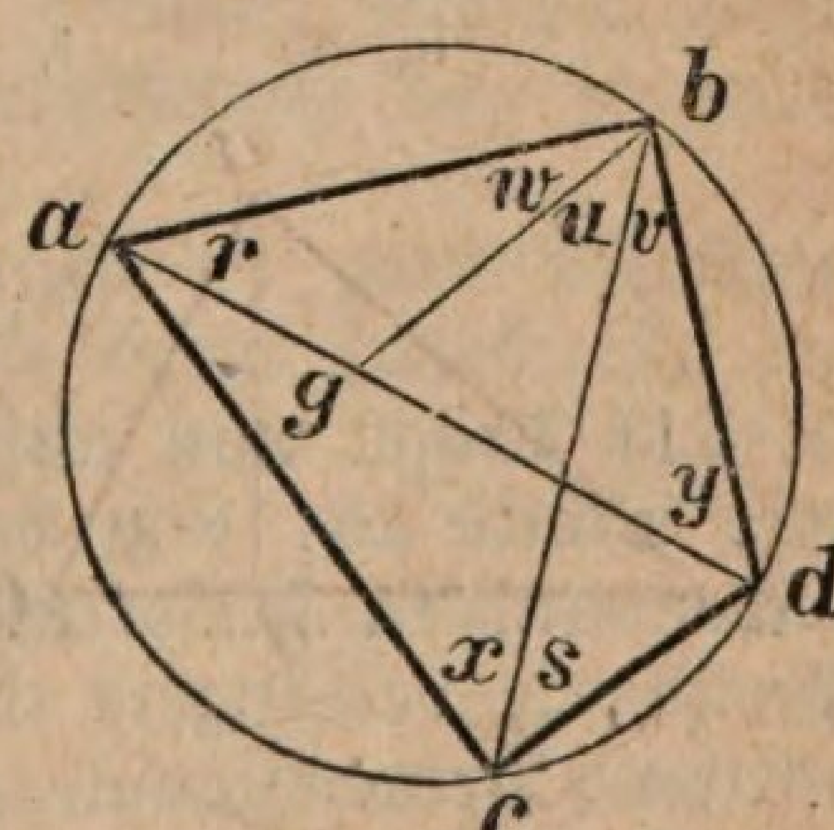
oder $ab \cdot ac = ae \cdot ad = ad^2 + ad \cdot de$,

oder $ab \cdot ac = ad^2 + bd \cdot dc$ (nach §. 148, 1).

§. 156. Lehrsatz.

Das Rechteck aus den Diagonalen eines Vierecks im Kreise ist gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten (Lehrsatz des Ptolemäus).

Fig. 87.



Beh. $bc \cdot ad = ab \cdot cd + ac \cdot bd$.

Beweis. Man trage von den an der Ecke b durch die Diagonale gebildeten Winkeln den kleineren Winkel v auf dem größeren ab, so daß $v = w$ ist.

Alsdann ist

$\triangle\, cbd \sim \triangle\, abg$, $(v = w,\ s = r)$,

daher $cb : cd = ab : ag$, oder

1) $cb \cdot ag = cd \cdot ab$.

Ferner ist $\triangle\, cab \sim \triangle\, dgb$, $(w + u = v + u,\ x = y)$,

daher $ca : cb = dg : db$, oder

2) $cb \cdot dg = ca \cdot db$.

Addirt man nun 1) und 2), so erhält man die Gleichung:

$$bc \cdot ad = ab \cdot cd + ac \cdot bd.$$

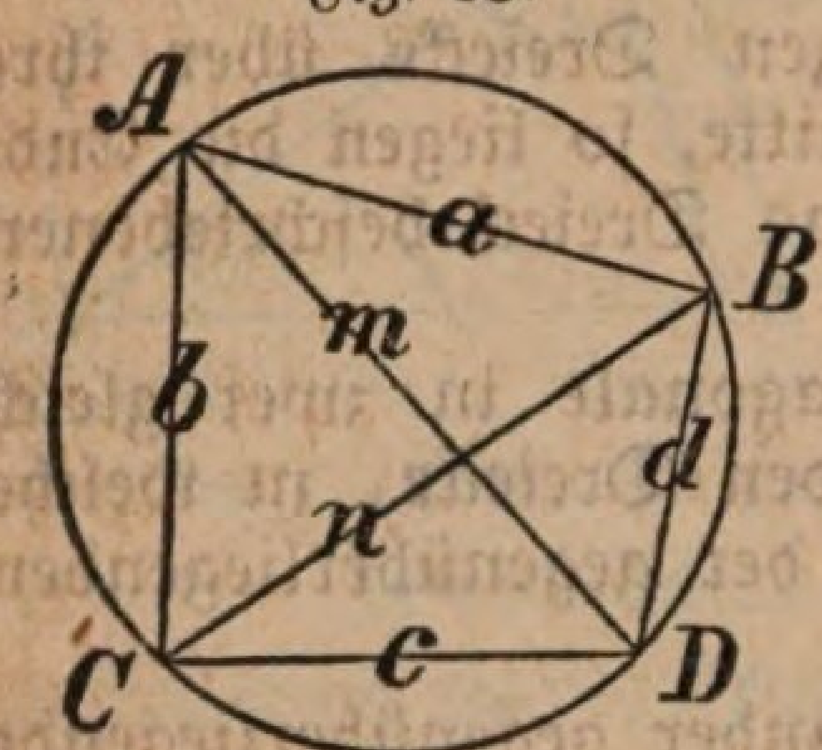
Anm. 1. Sind beide Diagonalen Durchmesser, so ist abcd ein Rechteck. Alsdann ist $bc^2 = ab^2 + ac^2$. Sind die Diagonalen gleich groß, ohne jedoch Durchmesser zu sein, so ist abcd ein Trapez, und folglich sind auch die beiden nicht parallelen Seiten gleich groß. Man erhält alsdann den Pythagoräischen Lehrsatz für spitzwinklige, oder für stumpfwinklige Dreiecke.

Anm. 2. Obiger Satz läßt sich umkehren. Der Beweis wird auf die Art geführt, daß man zunächst entwickelt, wie bei jedem Vierecke mit hohlen Winkeln, um welches sich kein Kreis beschreiben läßt, das Rechteck aus den Diagonalen kleiner als die Summe der Rechtecke aus je zwei gegenüberliegenden Seiten sein muß.

§. 157. Lehrsatz.

Die Diagonalen eines Vierecks im Kreise verhalten sich wie die Summen der Rechtecke aus den Seiten, welche in den Endpunkten der Diagonalen zusammenstoßen.

Fig. 88.



Beh. $n : m = (ab + dc) : (ad + bc)$.

Beweis. Es ist

$$\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle BAC + \triangle BDC,$$

folglich nach §. 154

$$\frac{adm}{4r} + \frac{bcm}{4r} = \frac{abn}{4r} + \frac{cdn}{4r}, \text{ oder}$$

$$(ad + bc)m = (ab + cd)n, \text{ daher}$$

$$m : n = (ab + cd) : (ad + bc).$$

Anm. Durch Umstellung der Summanden in der anfänglichen Gleichung gelangt man zum Verhältnisse der Seiten und erhält:

$$a : c = (bm - dn) : (bn - dm),$$
$$b : d = (am - cn) : (an - cm).$$

Uebungssätze.

1) Trägt man auf einem Durchmesser aus einem seiner Endpunkte (a) drei Stücke ab, von denen das eine die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern ist, errichtet in diesen Theilpunkten Lothe, die man bis zur Peripherie verlängert (bis d, e, f), so ist eine der drei Linien ad, ae, af die mittlere Proportionale zwischen den beiden andern.

2) Wenn in einem eingeschriebenen Vierecke eine der Diagonalen verlängert durch den Durchschnittspunkt der beiden Tangenten geht, welche man an die Endpunkte der andern Diagonale zieht, oder wenn sie mit diesen Tangenten parallel läuft, so sind die Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich groß.

3) Zieht man durch irgend einen Punkt der gemeinschaftlichen Sehne zweier Kreise in beiden beliebige Sehnen, so sind diejenigen, welche in diesem Punkte halbirt werden, gleich groß.

4) Verlängert man einen Durchmesser um den Radius und dann noch um den achten Theil des Radius, so ist die Tangente, welche man aus dem Endpunkte der Verlängerung an den Kreis legen kann, um den achten Theil des Radius kleiner als der Durchmesser.

5) Zieht man aus dem Mittelpunkte eines Kreises beliebige Geraden nach verschiedenen Punkten beliebiger Sehnen, so giebt das Quadrat einer solchen Geraden, vermehrt um das Rechteck aus den Stücken der zugehörigen Sehne, stets dieselbe Summe.

6) Zieht man aus dem einen Endpunkte a einer beliebigen Sehne ab einen Durchmesser und fällt auf denselben aus b eine Senkrechte, so ist jene Sehne ab die mittlere Proportionale zwischen jeder andern aus a gezogenen Sehne und dem Stücke derselben, welches vom Punkte a und jener Senkrechten begränzt wird.

7) In einem spitzwinkligen Dreiecke ist das Quadrat jeder Seite vermehrt um das Quadrat vom obern Abschnitte der zu ihr gehörigen Höhe gleich dem Quadrate des Durchmessers des umgeschriebenen Kreises. (Der obere Abschnitt ist der zwischen der Ecke und dem Durchschnittspunkte der Höhen liegende Theil.)

8) Verlängert man die Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks über ihre Fußpunkte hinaus um die Länge ihrer unteren Abschnitte, so liegen die Endpunkte dieser Verlängerungen im Umfange des um das Dreieck beschriebenen Kreises.

9) Wenn ein Viereck im Kreise durch die eine Diagonale in zwei gleich große Dreiecke getheilt wird, so verhalten sich die beiden Dreiecke, in welche es die zweite Diagonale theilt, wie die Quadrate der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks.

10) Wenn bei einem Vierecke im Kreise zwei einander gegenüberliegende Seiten sich wie die beiden übrigen Seiten zu einander verhalten, so muß es durch die eine Diagonale in zwei gleich große Dreiecke zerlegt werden.

11) Wenn bei einem Vierecke im Kreise die beiden Diagonalen sich so schneiden, daß die Abschnitte der einen gleich groß sind, so müssen die Abschnitte der andern sich verhalten, wie die Quadrate der gegenüberliegenden Seiten des Vierecks.

12) Berühren sich zwei Kreise von innen, und zieht man in dem größern eine Sehne bc, welche den kleinern in einem Punkte a berührt, und verbindet ferner die drei Punkte b, c und a mit dem Berührungspunkte m, so wird der Winkel bmc durch die Linie ma halbirt.

13) Theilt man den Durchmesser ab eines Kreises in zwei beliebige Stücke ac und cb, beschreibt über jedem dieser Stücke einen Halbkreis, errichtet ferner in c die Senkrechte cd bis zur Peripherie des obigen Kreises und verbindet schließlich d mit a und b, so verhalten sich die Stücke von da und db, welche innerhalb der beiden kleinern Halbkreise liegen, wie die dritten Potenzen von da und db.

14) Ist ein Kreisbogen ab in den Punkten c, d, e . . . m in eine beliebige Anzahl gleicher Theile getheilt, und verbindet man den zweiten Theilpunkt d mit dem letzten m und verlängert diese Linie dm bis zum Durchschnitte s mit der verlängerten Sehne ab, so ist diese Verlängerung ms gleich der Sehne am. (Als Hülfssatz zu 15.)

15) Theilt man einen Kreisbogen ab in den Punkten c, d, e . . . m in eine beliebige Anzahl gleicher Theile und verbindet a mit diesen Theilpunkten, so verhält sich die kleinste dieser Linien (ac) zur nächstfolgenden (ad),

wie irgend eine andere zur Summe der ihr vorhergehenden und nachfolgenden, also z. B. wie ag zu (af + ah).

16) Zwei sich schneidende Diagonalen eines regulären Fünfecks theilen sich nach stetiger Proportion, und zwar ist das größere Stück jeder Diagonale gleich der Fünfecksseite.

17) Verlängert man zwei Seiten eines regulären Fünfecks bis zu ihrem Durchschnittspunkte, so ist die Verlängerung einer jeden gleich der Diagonale, und die verlängerte Seite wird in der Ecke nach stetiger Proportion geschnitten.

18) Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke, dessen Seiten in stetiger Proportion stehen, eine Senkrechte aus dem Scheitel nach der Hypotenuse, so ist die kleinere Cathete gleich dem nicht anliegenden Hypotenusenabschnitte.

19) Einen Kreis zu construiren, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene Linie berührt

20) Einen Kreis zu construiren, der durch einen gegebenen Punkt geht und zwei gegebene Linien berührt.

21) Einen Kreis zu construiren, der zwei gegebene Linien und einen gegebenen Kreis berührt.

22) Ein Rechteck in ein anderes zu verwandeln, zu dem entweder der Umfang oder die Differenz der anliegenden Seiten gegeben sind.

23) Ein Dreieck zu construiren aus der Grundlinie, der zugehörigen Höhe und der Summe der beiden andern Seiten.

24) Ueber einer gegebenen Geraden als Hypotenuse ein Dreieck zu beschreiben, dessen Seiten eine stetige Proportion bilden.

25) Durch den Berührungspunkt a zweier gegebenen Kreise eine dieselben in m und n treffende Linie zu ziehen, so daß am + an, oder daß am — an einer gegebenen Linie gleich sei.

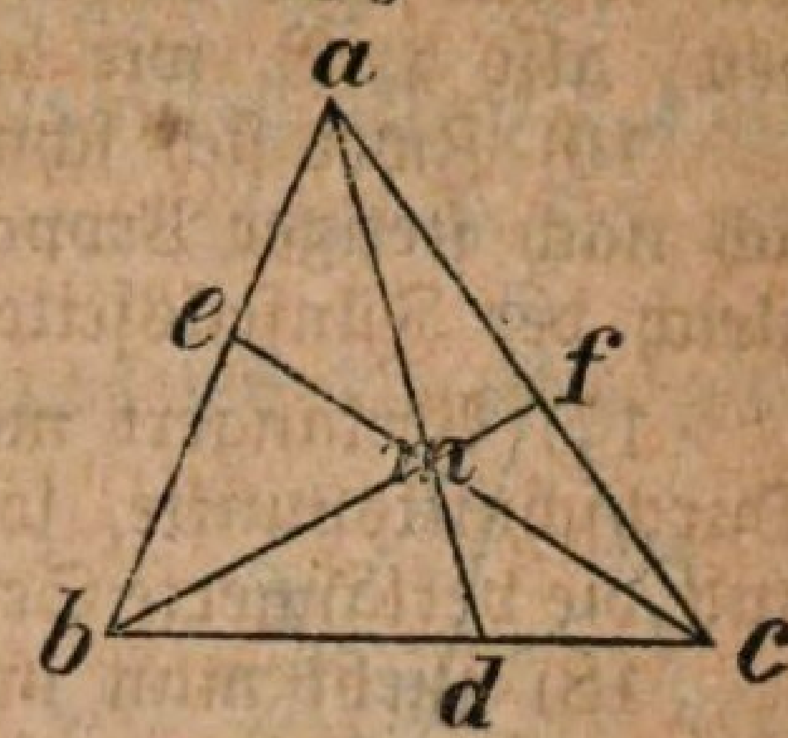
Anhang zum zwölften und dreizehnten Capitel.

A. Von den Transversalen des Dreiecks.

I. Erklärung. Jede beliebige Linie, welche eine Figur oder ein System von Linien durchschneidet, heißt eine Transversale derselben. Wo nicht das Gegentheil bemerkt wird, sind unter Transversalen nur gerade Linien zu verstehen.

II. Lehrsatz. Zieht man aus den drei Ecken eines Dreiecks durch einen innerhalb oder außerhalb desselben liegenden Punkt Transversalen nach den gegenüberstehenden Seiten, so wird jede dieser Seiten in zwei Abschnitte der Art getheilt, daß das Produkt aus drei nicht aneinander liegenden Abschnitten gleich ist dem Produkte aus den drei anderen.

Fig. 89.



Beh. bd . cf . ae = dc . fa . eb.

Beweis. Es ist

$\triangle$ bam : $\triangle$ bmd = am : md,

$\triangle$ cam : $\triangle$ cmd = am : md,

folglich $\triangle$ bam : $\triangle$ cam = $\triangle$ bmd : $\triangle$ cmd,

oder $\triangle$ bam : $\triangle$ cam = bd : dc. (1)

Ebenso erhält man: $\triangle$ cbm : $\triangle$ abm = cf : fa, (2)

$\triangle$ acm : $\triangle$ bcm = ae : eb. (3)

Multiplicirt man die Gleichungen 1, 2 und 3 mit einander, so ist

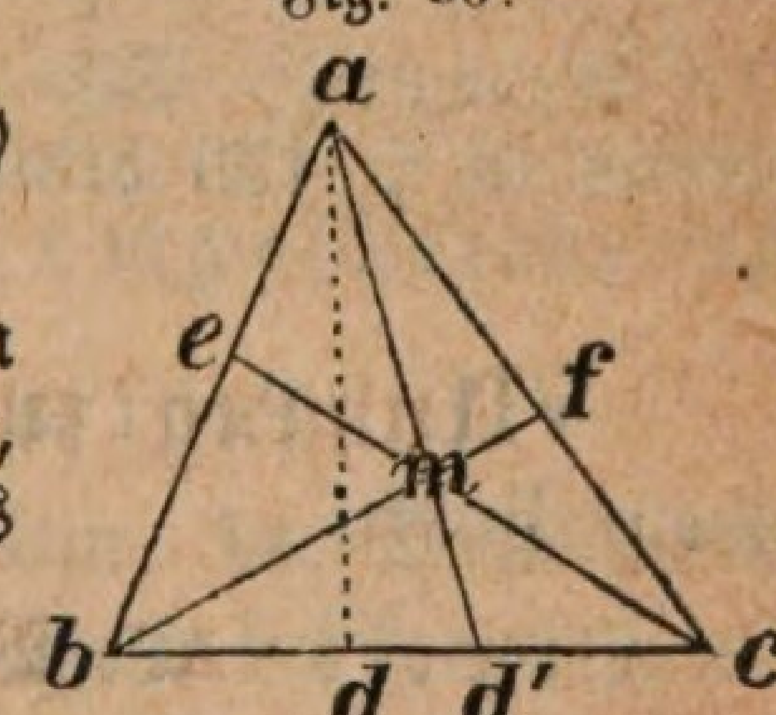
bam . cbm . acm : cam . abm . bcm = bd . cf . ae : dc . fa . eb,

folglich bd . cf . ae = dc . fa . eb.

Anm. Liegt der Punkt m außerhalb des Dreiecks, so wird der Beweis in ähnlicher Art geführt.

III. Lehrsatz. Zieht man aus jeder Ecke eines Dreiecks eine Transversale nach der gegenüberstehenden Seite oder deren Verlängerung, und ist alsdann das Produkt aus drei nicht aneinander liegenden Abschnitten gleich dem Produkte aus den drei anderen, so schneiden sich die Transversalen in einem Punkte.

Fig. 90.



Vor. bd . cf . ae = dc . fa . eb. (1)

Beh. Die Transversalen ad, bf, ce schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Die Transversalen bf und ce schneiden sich im Punkte m. Ginge ad nicht durch diesen Punkt, so könnte man die Transversale amd′ ziehen, und es wäre dann (nach II)

bd′ . cf . ae = d′c . fa . eb. (2)

Nach 1) und 2) wäre folglich

bd′ : bd = d′c : dc, oder

(bd′ + d′c) : d′c = (bd + dc) : dc, oder

bc : d′c = bc : dc, daher

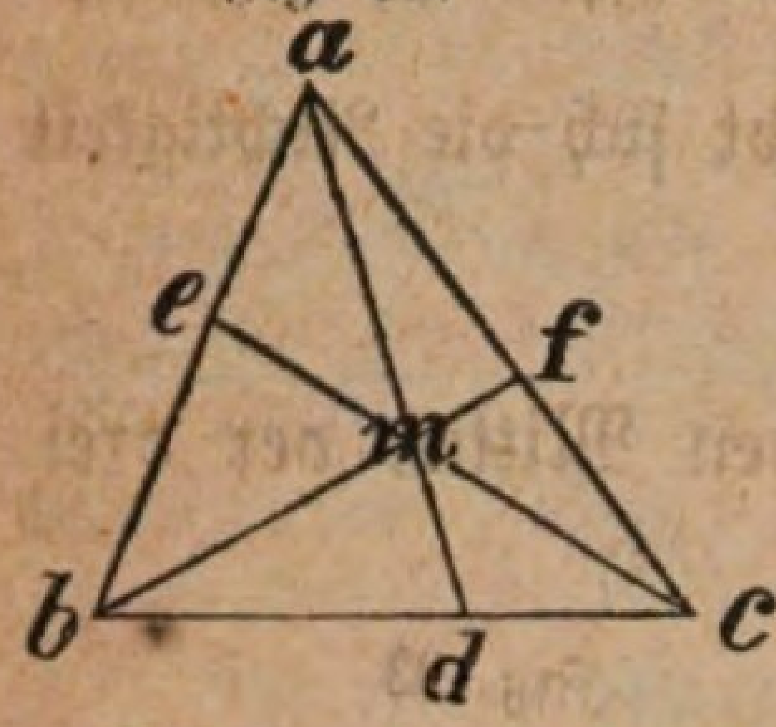
d′c = dc.

Die Linie ad fällt also auf die Linie ad′, und die drei Transversalen schneiden sich in einem Punkte.

Anm. Sind die Transversalen nach den Verlängerungen der Seiten gezogen, so wird der Beweis in ähnlicher Art geführt.

IV. Lehrsatz. Die Transversalen, welche die drei inneren Winkel eines Dreiecks halbiren, schneiden sich in einem Punkte.

Fig. 91.



Beweis. Nach §. 128 ist

ab : ac = bd : cd,

bc : ba = cf : af,

ca : cb = ae : be.

Multiplicirt man diese drei Gleichungen, so erhält man

bd . cf . ae = dc . fa . eb.

Die Transversalen schneiden sich also (nach III) in einem Punkte, im Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises. (§. 38, 4.)

V. Lehrsatz. Die Transversalen, welche einen inneren und die beiden diesem nicht anliegenden äußeren Winkel halbiren, schneiden sich in einem Punkte, im Mittelpunkte eines äußeren berührenden Kreises.

Beweis. Er wird mit Hülfe von §. 128 in ähnlicher Art geführt, wie der Beweis zu IV.

VI. Lehrsatz. Die aus den Ecken eines Dreiecks nach den Mitten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Transversalen schneiden sich in einem Punkte, dem Schwerpunkte, und jede Transversale wird in diesem Punkte in zwei Stücke getheilt, die sich wie 1 : 2 verhalten.

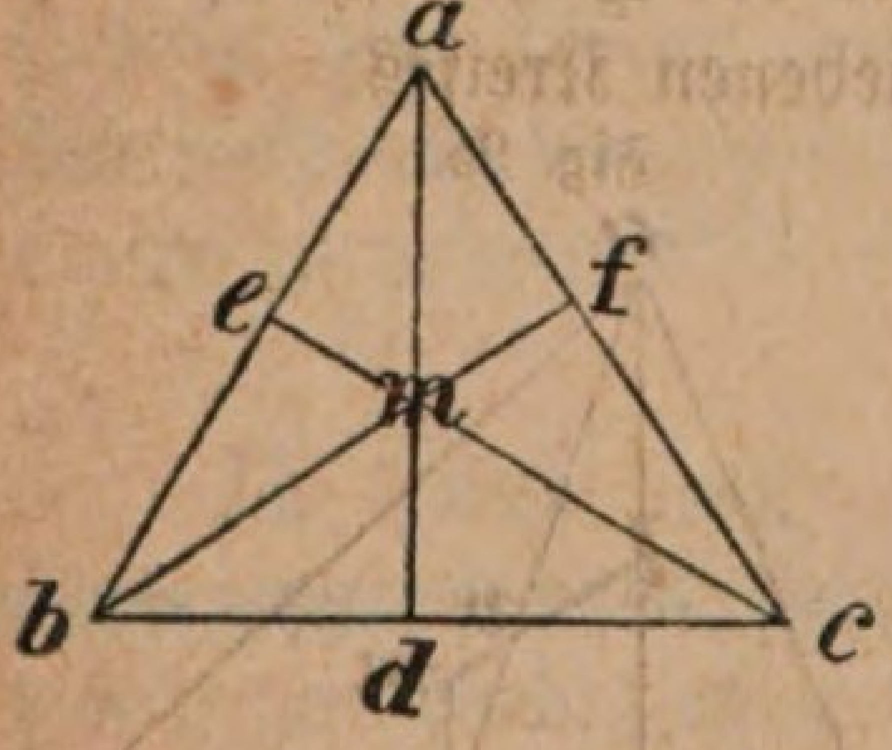
Beweis. Der erste Theil des Satzes folgt aus III; der zweite ist bereits in §. 139 bewiesen.

VII. Lehrsatz. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Derselbe ist für drei verschiedene Fälle zu führen.

a) Ist das Dreieck abc (Fig. 92) spitzwinklig, und sind ad, bf, ce die drei Höhen, so ergeben sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke aec und afb, bda und bec, cfb und cda folgende Proportionen:

Fig. 92.



1) ae : af = ac : ab,

2) bd : be = ba : bc,

3) cf : cd = cb : ca.

Multiplicirt man die drei Gleichungen mit einander, so erhält man:

ae . bd . cf = be . af . cd,

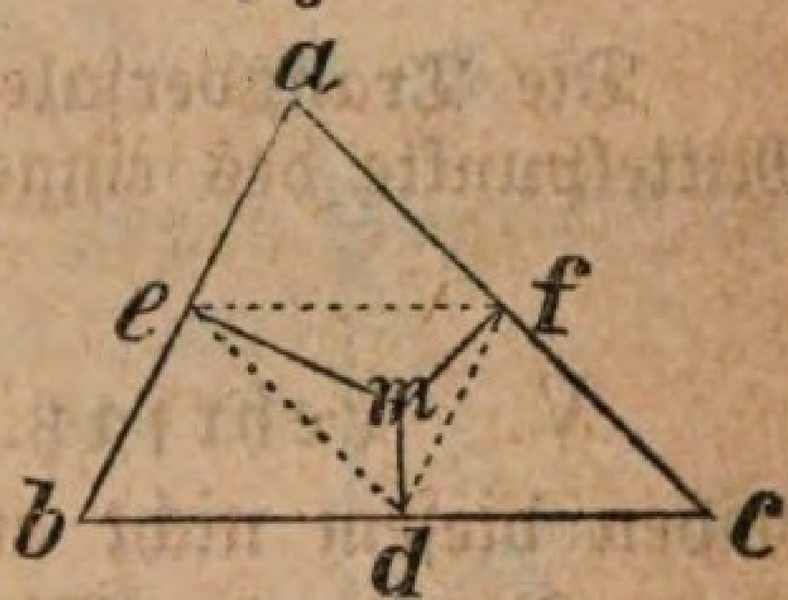
und die drei Höhen schneiden sich also in einem Punkte (nach III).

b) Ist das Dreieck amc (Fig. 92) stumpfwinklig, und schneiden sich die beiden Höhen ae und cd in dem Punkte b, so ist die Linie bmf die dritte Höhe des spitzwinkligen Dreiecks abc (nach a), steht also senkrecht auf ac, und die (verlängerten) Höhen ae, cd, mf des Dreiecks amc schneiden sich also in einem Punkte.

c) Ist das betreffende Dreieck rechtwinklig, so ergiebt sich die Richtigkeit des Satzes unmittelbar aus der Figur.

VIII. Lehrsatz. Die drei Senkrechten aus den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

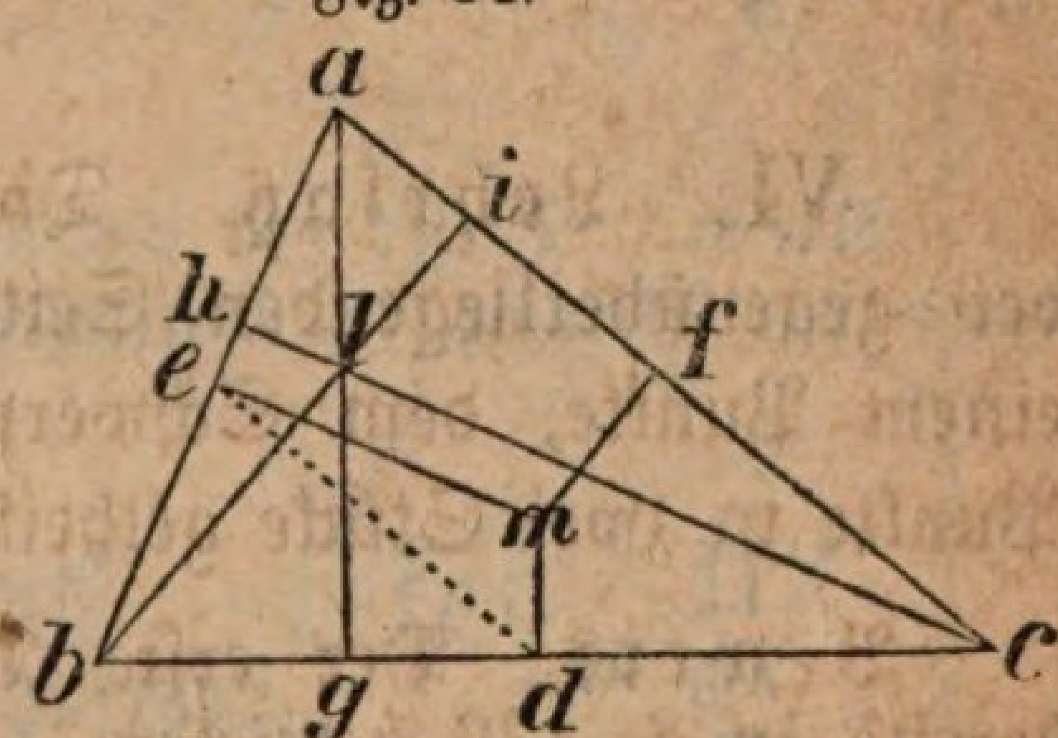
Fig. 93.



Beweis. Sind die drei Seiten ab, ac, bc in e, f und d halbirt, so ist fd || ab, ed || ac, ef || bc. Es stehen daher die auf ab, ac und bc in den Punkten e, f, d errichteten Senkrechten auch senkrecht auf df, de und ef, sind also die Höhen des Dreiecks efd. Als solche müssen sie sich aber in einem Punkte schneiden (nach VII). — Vergl. §. 38, 3.

IX. Zusatz. Zieht man in dem Dreiecke abc außer den erwähnten drei Senkrechten noch die drei Höhen ag, ch, bi, so ist

Fig. 94.



$$\triangle\, emd \backsim \triangle\, cla,$$

weil je zwei Seiten parallel sind, daher

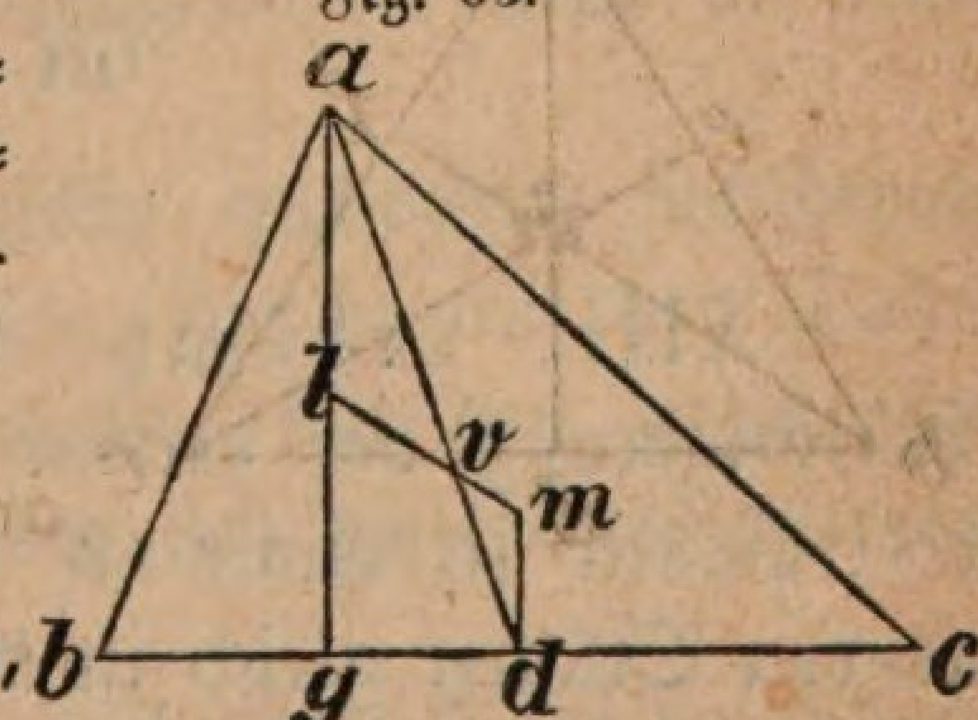
$$md : la = ed : ca = 1 : 2,$$

und ebenso ergiebt sich, daß $cl = 2em$, $bl = 2fm$ ist.

Der obere Theil einer Höhe ist also doppelt so groß, wie die Entfernung der Grundlinie vom Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises.

X. Lehrsatz. Der Durchschnittspunkt der Höhen, der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises und der Schwerpunkt liegen bei jedem Dreiecke in gerader Linie, und zwar liegt der Schwerpunkt zwischen den beiden anderen Punkten so, daß er vom Durchschnittspunkte der Höhen doppelt so weit entfernt ist, als vom Mittelpunkte des umgeschriebenen Kreises.

Fig. 95.



Vor. Es sei l (Fig. 95) der Durchschnittspunkt der Höhen, v der Schwerpunkt, m der Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises (Vergl. Fig. 94).

Beh. 1) $\sphericalangle\, lvm = 2R$;

2) $lv = 2mv$.

Beweis. Es ist $al = 2dm$ (nach IX), $av = 2dv$ (nach VI), $\sphericalangle\, lav = \sphericalangle\, vdm$, also $\triangle\, lav \backsim \triangle\, mdv$.

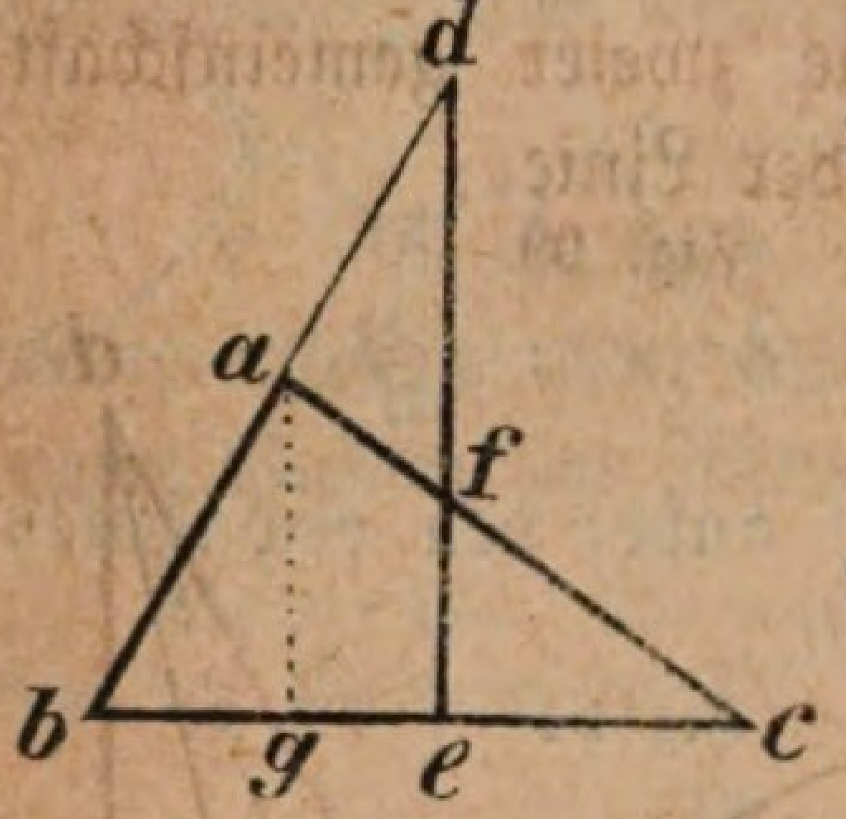
Folglich ist

1) $\sphericalangle$ avl = $\sphericalangle$ dvm, also $\sphericalangle$ lvm = 2R;

2) lv : mv = al : dm = 2 : 1.

XI. Lehrsatz. Werden die Seiten eines Dreiecks oder ihre Verlängerungen von einer beliebigen Transversale geschnitten, so theilt diese Transversale jede Seite des Dreiecks in zwei solche Abschnitte, daß das Produkt aus drei nicht aneinanderliegenden Abschnitten gleich ist dem Produkte aus den drei anderen (Satz des Menelaus).

Fig. 96.



Beh. be . cf . ad = ec . fa . db.

Beweis. Zieht man aus a die Linie ag parallel mit de, so ist

da : db = eg : eb,

cf : fa = ce : eg.

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man:

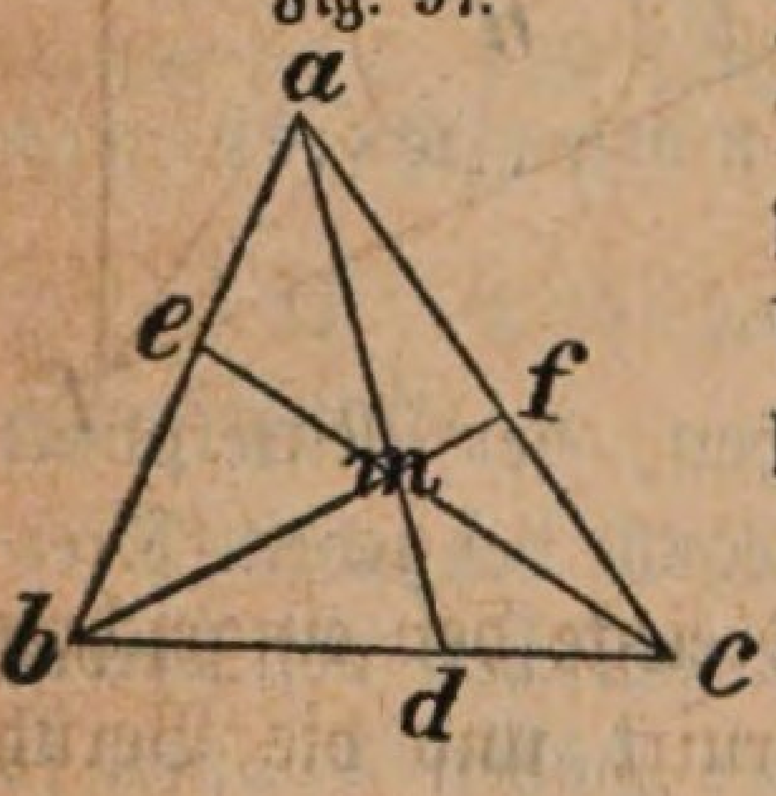
(da . cf) : (db . fa) = ce : eb, oder

da . cf . eb = db . fa . ce.

Anm. Trifft die Transversale die Verlängerungen der drei Seiten, so wird der Beweis in ähnlicher Art geführt.

XII. Zusatz. Aus XI läßt sich der unter II angegebene Lehrsatz sehr leicht ableiten. Zieht man nämlich im Dreiecke abc die drei Transversalen ad, ce und bf durch den Punkt m, so ist ad Transversale des Dreiecks bec, fb Transversale des Dreiecks aec. Alsdann erhält man:

Fig. 97.



1) bd . cm . ea = dc . me . ab,

2) cf . ab . em = fa . be . mc.

Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man:

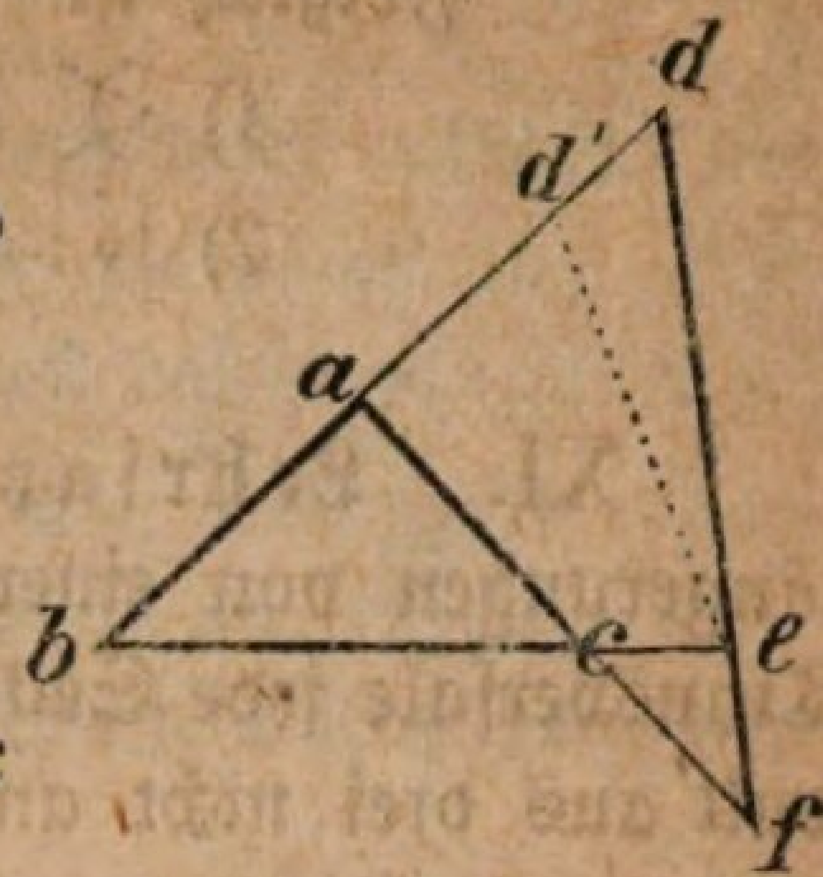
bd . cf . ae = dc . fa . eb.

XIII. Lehrsatz. Wenn man auf zwei Seiten eines Dreiecks und der Verlängerung der dritten, oder auf den Verlängerungen aller drei Seiten drei Punkte so annimmt, daß das Produkt von drei nicht aneinander liegenden Stücken gleich ist dem Produkte der drei anderen, so läßt sich durch diese drei Punkte eine gerade Linie ziehen.

Vor. $be \cdot cf \cdot ad = ce \cdot af \cdot bd$.

Beh. $\sphericalangle\, fed = 2R$.

Fig. 98.



Beweis. Wäre fed eine gebrochene Linie, so könnte man eine gerade Linie fed' ziehen. Alsdann wäre: $be \cdot cf \cdot ad' = ce \cdot af \cdot bd'$.

Nun ist aber $be \cdot cf \cdot ad = ce \cdot af \cdot bd$.

Es ist folglich $ad : ad' = bd : bd'$, oder

$(bd - ad) : ad = (bd' - ad') : ad'$, oder

$ad = ad'$.

Die beiden Linien fed und fed' fallen also zusammen.

XIV. Lehrsatz. Die Durchschnittspunkte je zweier gemeinschaftlichen äußeren Tangenten dreier Kreise liegen in gerader Linie.

Beweis. Die Linien abf, ace und dcb sind gerade. Wenn man nun die Radien $ah = r'$ und $bi = r$ nach den Berührungspunkten h und i zieht, so ist $\Delta\, fbi \sim \Delta\, fah$, daher

1) $fb : fa = bi : ah = r : r'$.

Bezeichnet man den Radius des dritten Kreises durch r'', so ist ebenso:

2) $dc : db = r'' : r$,

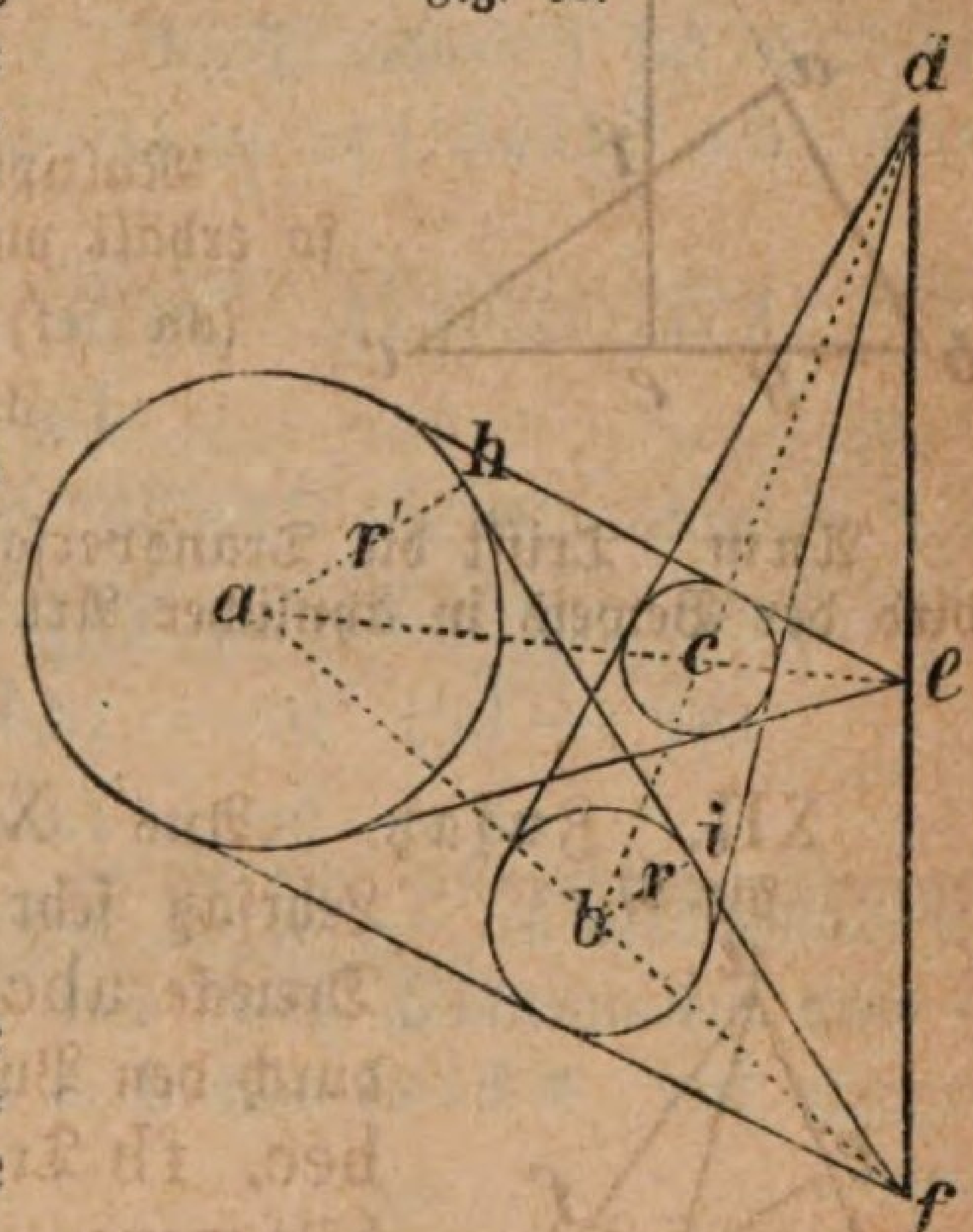
3) $ea : ec = r' : r''$.

Aus 1, 2 und 3 erhält man:

$fb \cdot dc \cdot ea = fa \cdot db \cdot ec$.

Die Linie def ist also (nach XIII) eine geradlinige das Dreieck abc in den Verlängerungen der Seiten durchschneidende Transversale.

Fig. 99.



XV. Lehrsätze. 1) Wenn man zu einem Dreiecke den eingeschriebenen, oder einen auswärts berührenden Kreis construirt und die Berührungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks durch gerade Linien verbindet, so schneiden sich diese Verbindungslinien stets in einem Punkte.

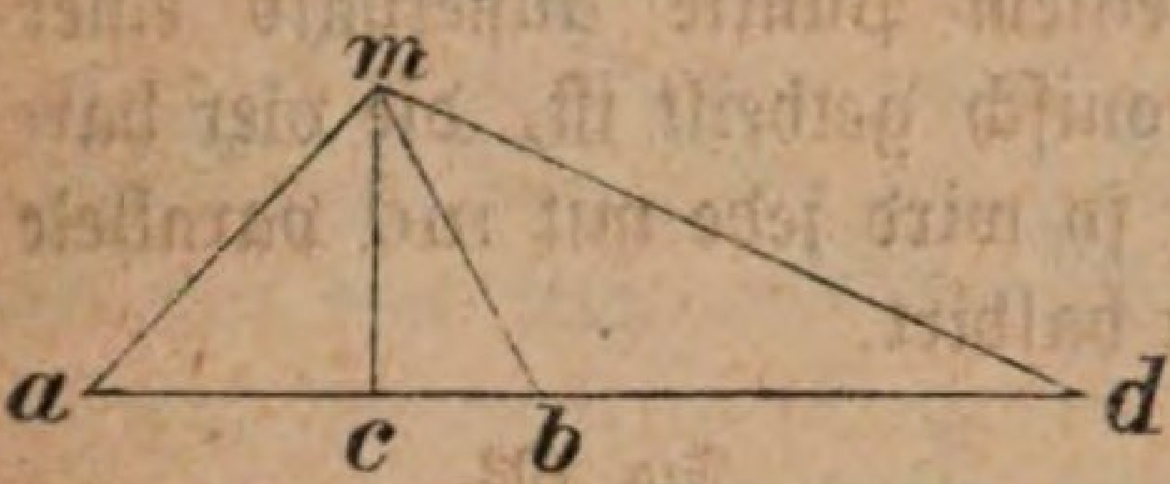
2) Wenn man zu einem Dreiecke sämmtliche auswärts berührende Kreise construirt und diejenigen Berührungspunkte, welche auf den Seiten des Dreiecks (nicht auf den Verlängerungen) liegen, mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbindet, so schneiden sich diese Verbindungslinien in einem Punkte.

Anm. Die Beweise sind mit Hülfe der vorhergehenden Sätze zu führen.

Von den harmonischen Punkten.

XVI. Erklärung. Liegen vier Punkte a, b, c, d in gerader Linie, und verhalten sich die Abstände der Punkte a und b von c ebenso, wie die Abstände dieser Punkte von d, ist also

Fig. 100.



$$ac : bc = ad : bd,$$

so läßt sich diese Proportion auch in folgender Weise schreiben:

$$(ad - cd) : (cd - bd) = ad : bd.$$

Es bilden daher die Linien ad, cd und bd eine stetige harmonische Proportion. (Vergl. Arithm. I, §. 128.) Die Punkte a, b, c und d heißen harmonische Punkte; a und b heißen die Hauptpunkte, c heißt der innere, d der äußere Theilpunkt.

Verbindet man die Punkte a, b, c, d mit einem beliebigen, außerhalb der Linie ad liegenden Punkte m, so heißen ma, mb, mc und md harmonische Strahlen, m der Strahlpunkt.

XVII. Zusatz. Ist $ac : bc = ad : bd$, so ist auch

$$db : cb = da : ca,$$

d. h. Hauptpunkte und Theilpunkte können ihre Bedeutung vertauschen.

Ferner ergiebt sich aus obiger Proportion, daß

$$(ac - bc) : bc = (ad - bd) : bd = ab : bd, \text{ daher}$$

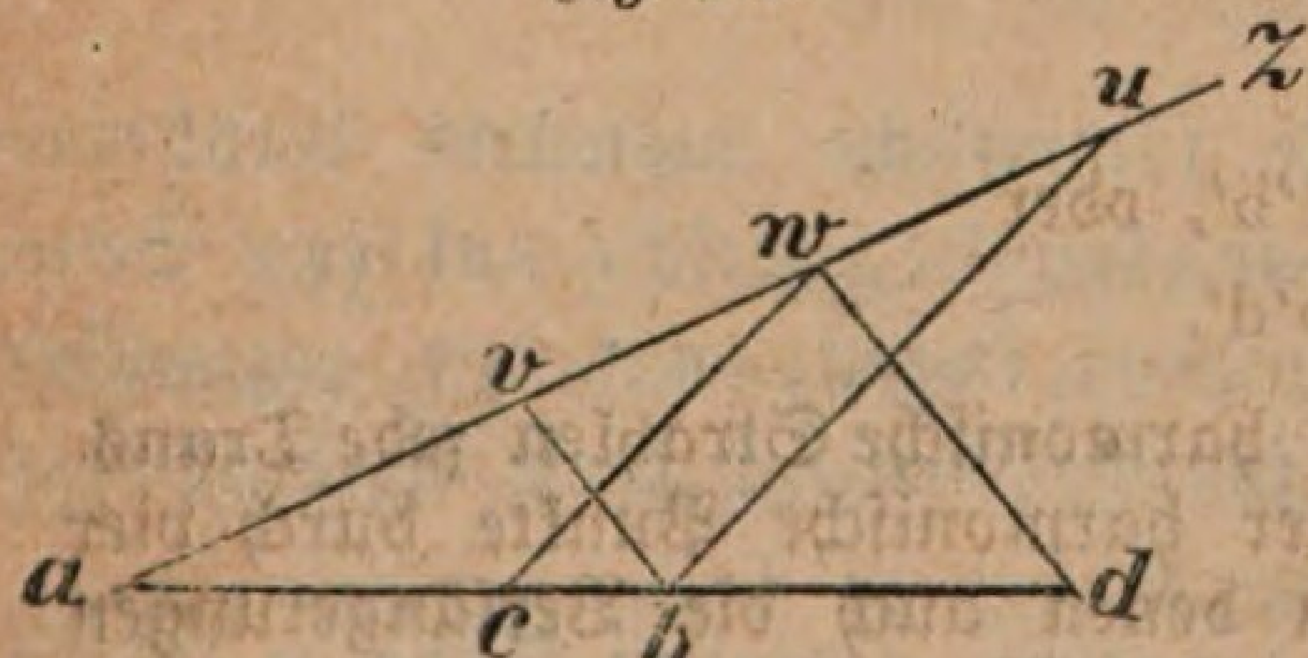
$$ac - bc = (ab \,.\, bc) : bd \text{ ist.}$$

Je kleiner also $ac - bc$ ist, desto größer muß bd sein. Ist $ac = bc$, so wird bd unendlich groß, und ist $ac < bc$, so muß auch $(ad - bd)$ negativ sein, d. h. es muß d in der Verlängerung von ba über a hinaus liegen.

XVIII. Aufgabe. Zu drei harmonischen Punkten den vierten zu finden.

Auflösung. Ist der innere Theilpunkt c zu den Punkten a, b und d zu suchen, so ziehe man eine beliebige Linie az, ferner aus b und d zwei beliebige Parallelen bv und dw, mache $wu = wv$, ziehe ub und hierauf $wc \parallel ub$, so ist c der innere Theilpunkt. (Vergl. §. 128, Anm.)

Fig. 101.



Beweis. Es ist

$$ac : cb = aw : wu = aw : vw,$$

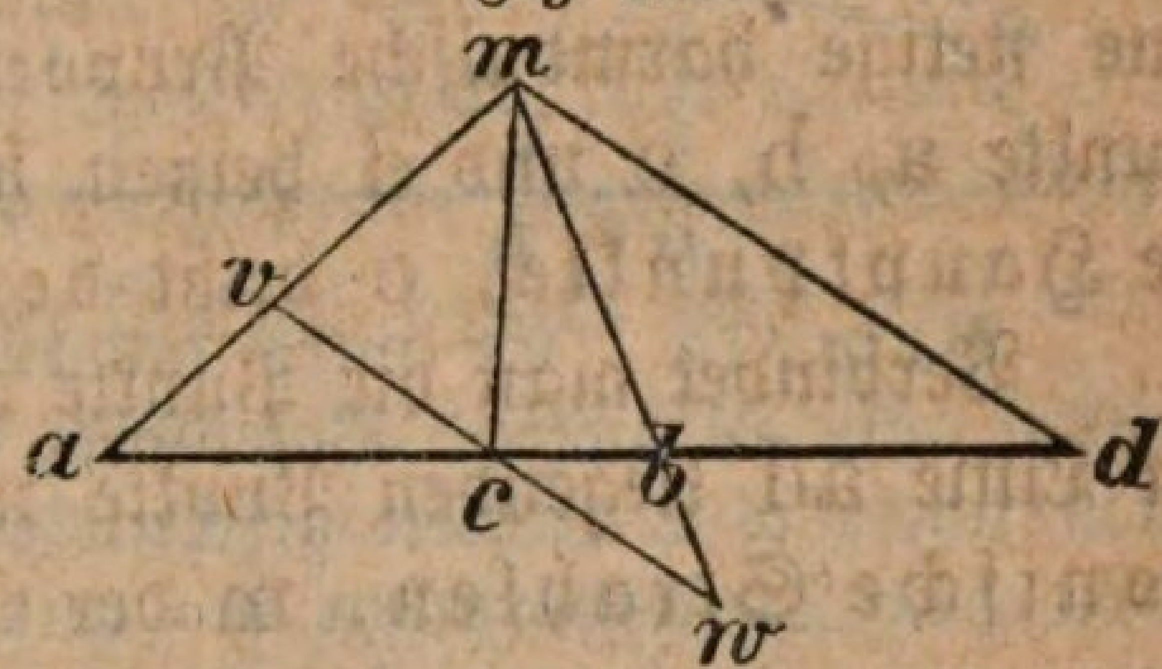
ferner $ad : bd = aw : vw$,

also $ac : cb = ad : bd$.

Ist der äußere Theilpunkt zu suchen, so ziehe man zuerst die Parallelen cw und bu, mache dann wv = wu, ziehe vb und hierauf wd || vb. Es ist alsdann d der gesuchte äußere Theilpunkt, und der Beweis wird geführt, wie im ersten Falle.

XIX. Lehrsatz. Zieht man aus einem Punkte außerhalb einer gegebenen Linie, die in a, b, c und d harmonisch getheilt ist, die vier harmonischen Strahlen ma, mb, mc und md, so wird jede mit md parallele Transversale durch die drei anderen Strahlen halbirt.

Fig. 102.



Vor. ac : ad = bc : bd;
vw || md.

Beh. cv = cw.

Beweis. Es ist Δ cav $\sim$ Δ dam,
daher ac : ad = cv : dm;
ferner Δ cbw $\sim$ Δ dbm,
daher cb : db = cw : dm.

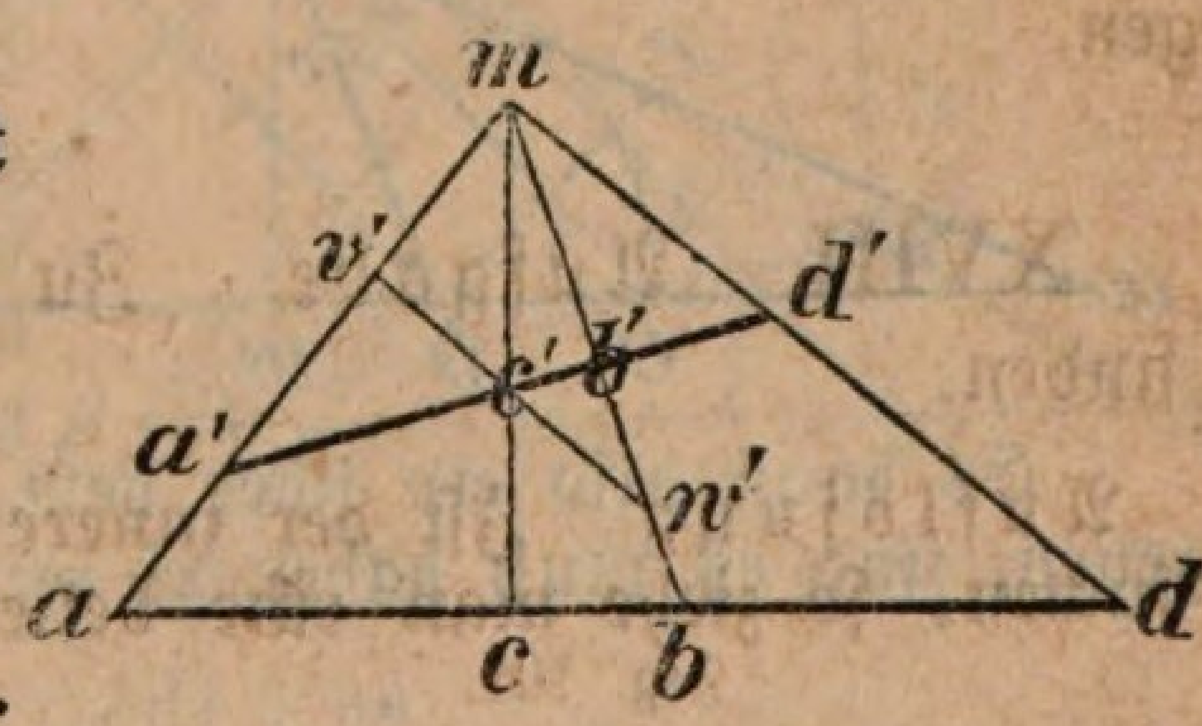
Da nun ac : ad = bc : bd ist, so ist auch cv : dm = cw : dm, also cv = cw.

Ist aber cv = cw, so müssen auch alle übrigen mit md parallel gezogenen Linien durch ma, mc und mb halbirt werden (§. 127).

Aus diesem Satze ergiebt sich zugleich eine einfache Construction zur Auffindung eines der vier harmonischen Punkte aus den drei übrigen.

XX. Lehrsatz. Jede Transversale, welche vier harmonische Strahlen durchschneidet, wird von denselben harmonisch geschnitten.

Fig. 103.



Vor. ac : bc = ad : bd.

Beh. a'c' : b'c' = a'd' : b'd'.

Beweis. Zieht man v'c'w' || md, so ist
c'v' = c'w' (nach XIX).

Nun ist Δ c'b'w' $\sim$ Δ d'b'm, also
1) c'b' : d'b' = c'w' : d'm;

ferner ist Δ a'c'v' $\sim$ Δ a'd'm, also
2) a'c' : a'd' = c'v' : d'm = c'w' : d'm.

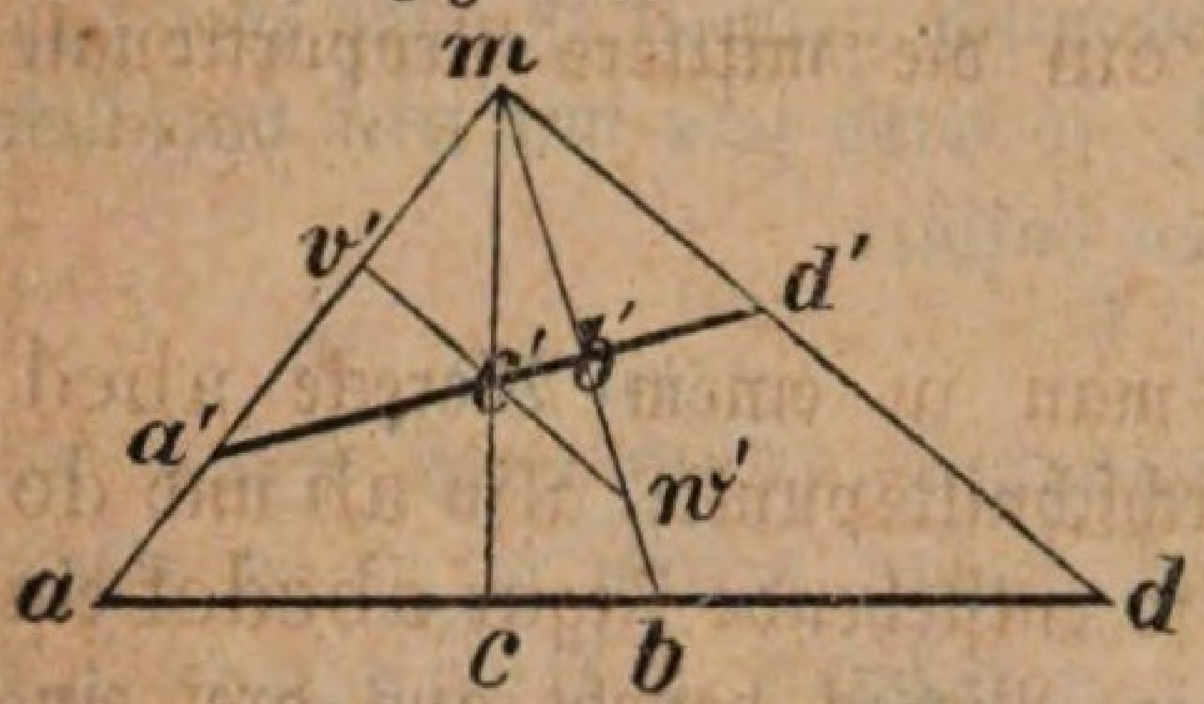
Aus 1) und 2) folgt nun unmittelbar:
a'c' : a'd' = c'b' : d'b', oder
a'c' : b'c' = a'd' : b'd'.

Aus diesem Satze ergiebt sich, daß vier harmonische Strahlen jede Transversale harmonisch schneiden, daß also vier harmonische Punkte durch vier harmonische Strahlen bestimmt sind, (von denen auch die Verlängerungen über den Strahlpunkt hinaus genommen werden können).

XXI. Lehrsatz. Vier von einem Punkte ausgehende Strahlen schneiden jede Transversale so, daß jedes der drei Doppelverhältnisse, die sich aus den Abständen je zweier Durchschnittspunkte von den beiden übrigen bilden lassen, einen unveränderlichen Werth hat.

Beh. Sind ma, mc, mb, md (Fig. 104) beliebige Strahlen, so ist

Fig. 104.



1) $\frac{ab}{db} : \frac{ac}{dc} = \frac{a'b'}{d'b'} : \frac{a'c'}{d'c'}$;

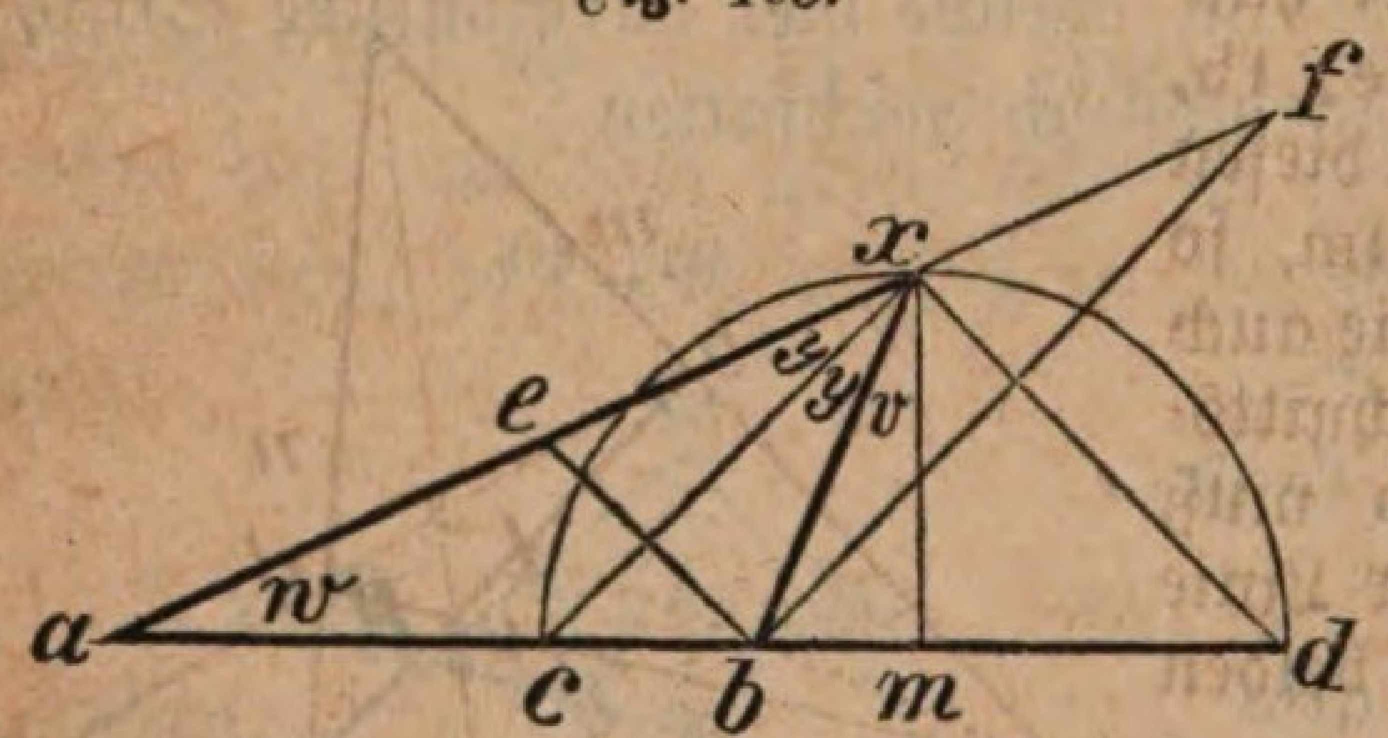
2) $\frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} = \frac{a'b'}{c'b'} : \frac{a'd'}{c'd'}$;

3) $\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$.

Beweis. Er wird dadurch eingeleitet, daß man aus d' eine Linie parallel mit ad zieht. Bezeichnet man die Punkte, in welchen diese Linie von den übrigen Strahlen geschnitten wird, durch a'', b'', c'', so wird $\triangle$ a'a''d' von den Transversalen mc und mb, ferner $\triangle$ c'c''d' von den Transversalen ma und mb, ferner $\triangle$ b'b''d' von den Transversalen mc und ma geschnitten. Entwickelt man (nach XI) die sich hieraus ergebenden Gleichungen, so erhält man die obigen Behauptungen.

XXII. Lehrsatz. Sind a, b, c, d vier harmonische Punkte, und beschreibt man über cd als Durchmesser eine Kreislinie, so ist dieselbe der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks, dessen Grundlinie ab ist und dessen zwei andere Seiten sich verhalten wie ac : bc.

Fig. 105.



Vor. ac : bc = ad : bd;

$\sphericalangle$ cxd = R.

Beh. xa : xb = ac : bc.

Bew. Zieht man be || dx und macht dann xf = xe, so ist bf || cx (nach XIII). Aus bf || cx, be || dx, $\sphericalangle$ cxd = R folgt aber, daß $\sphericalangle$ ebf = R ist.

Es muß also ein über dem Durchmesser exf beschriebener Kreis durch b gehen, und es muß daher xb = xe = xf sein. Da nun

ac : cb = ax : xf ist, so ist auch

ac : cb = ax : xb.

XXIII. Zusatz. Soll der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks gesucht werden, dessen Grundlinie ab ist, und dessen zwei andere Seiten sich verhalten wie m : n, so theile man zuerst ab im Punkte c nach diesem Verhältnisse, suche zu a, b, c den vierten harmonischen Punkt d und beschreibe über cd als Durchmesser einen Kreis.

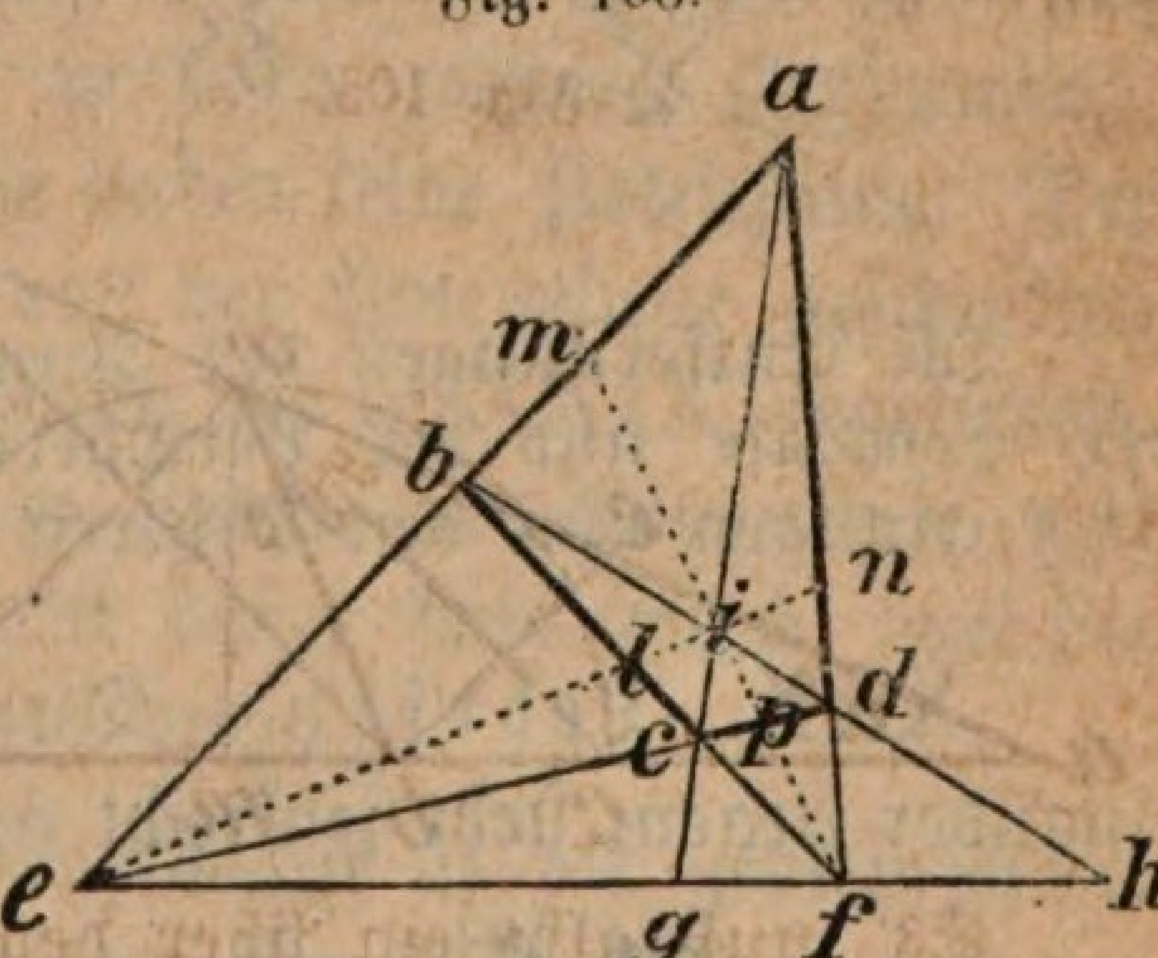
XXIV. Zusatz. Aus der Proportion ac : cb = ax : xb (in XXII) folgt, daß $\sphericalangle$ axc = $\sphericalangle$ cxb oder y = y ist. Zieht man noch den Radius mx, so ist $\sphericalangle$ mcx = $\sphericalangle$ mxc = y + v. Ferner ist $\sphericalangle$ bcx = y + w, daher v = w. Aus v = w und aus $\sphericalangle$ xma = $\sphericalangle$ bmx folgt aber, daß $\triangle$ amx $\sim$ $\triangle$ xmb, daß also am : xm = mx : mb, oder am . mb = mx^2 = mc^2 ist.

Halbirt man also cd in m, so ist cm die mittlere Proportionale zwischen am und bm.

XXV. Erklärung. Verlängert man in einem Vierecke abcd (Fig. 106) je zwei Seiten bis zu ihrem Durchschnittspunkte, also ab und dc bis e, bc und ad bis f, so nennt man die so entstehende Figur abcdef ein vollständiges Viereck. Das vollständige Viereck besteht aus drei einfachen Vierecken abcd, aecf und bedf, und zwei gegenüberliegende Seiten desselben schneiden sich nicht erst in der Verlängerung, sondern auf den Seiten selbst. Die Linie ef, welche wie bd und ac die Durchschnittspunkte zweier Seitenpaare verbindet, heißt die dritte Diagonale.

XXVI. Lehrsatz. Verlängert man die beiden ersten Diagonalen ac und bd eines vollständigen Vierecks abcdef bis zu ihren Durchschnittspunkten g und h mit der dritten Diagonale ef, so wird jede Diagonale durch die beiden anderen harmonisch getheilt.

Fig. 106.



Beweis. Betrachtet man e und f als zwei Strahlpunkte, von welchen je drei harmonische Strahlen eh, ed, ea, ferner fe, fb, fa ausgegangen sind, und sucht man zu diesen Strahlen die vierten Strahlen en und fm, so wird durch diese Strahlen sowohl ag wie auch bh harmonisch getheilt. Der Durchschnittspunkt der beiden Strahlen en und fm muß also sowohl in der Linie ag, wie in der Linie bh, also im Durchschnittspunkte i der beiden Diagonalen liegen, und es sind also a, i, c, g vier harmonische Punkte. Sind aber a, i, c, g harmonische Punkte, so gilt dasselbe (nach XX) auch für b, i, d, h, ferner für e, g, f, h.

XXVII. Zusatz. Aus vorigem Satze und aus XX ergeben sich noch folgende Beziehungen:

Es sind a, n, d, f und a, m, b, e und d, p, c, e und b, l, c, f harmonische Punkte, weil sie von harmonischen Strahlen getroffen werden. Es werden also auch die Seiten harmonisch getheilt.

Ferner sind auch m, i, p, f und n, i, l, e harmonische Punkte.

Da der Durchschnittspunkt je zweier Diagonalen immer den vierten harmonischen Punkt zu drei gegebenen liefert, so liegt in obigem Satze ein Mittel, zu drei gegebenen harmonischen Strahlen bloß mit Hülfe des Lineals den vierten zu finden.

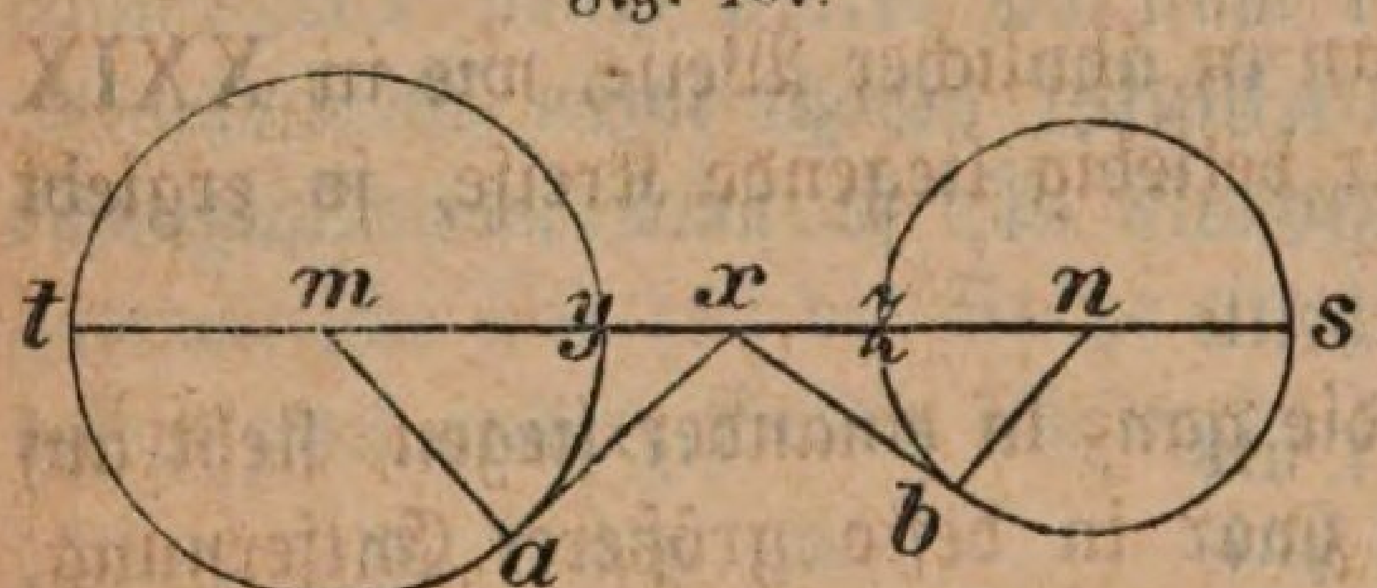
Ferner läßt sich auf dieselbe Art die Aufgabe lösen, aus einem Punkte zwischen zwei convergirenden geraden Linien eine dritte Linie nach dem unbekannten Durchschnittspunkte der beiden ersteren bloß mit Hülfe des Lineals zu ziehen.

c. Von den Potenzlinien oder Chordalen.

XXVIII. Erklärung. Die Potenzlinie zweier Kreise ist der geometrische Ort für den Durchschnittspunkt zweier gleichen Tangenten beider Kreise. Zieht man also aus einem beliebigen Punkte der Potenzlinie (vier) Tangenten nach beiden Kreisen, so sind diese sämmtlich gleich groß.

XXIX. Aufgabe. Den Punkt zu bestimmen, in welchem die Centrale zweier Kreise, die ganz außer einander liegen, von der Potenzlinie geschnitten wird.

Fig. 107.



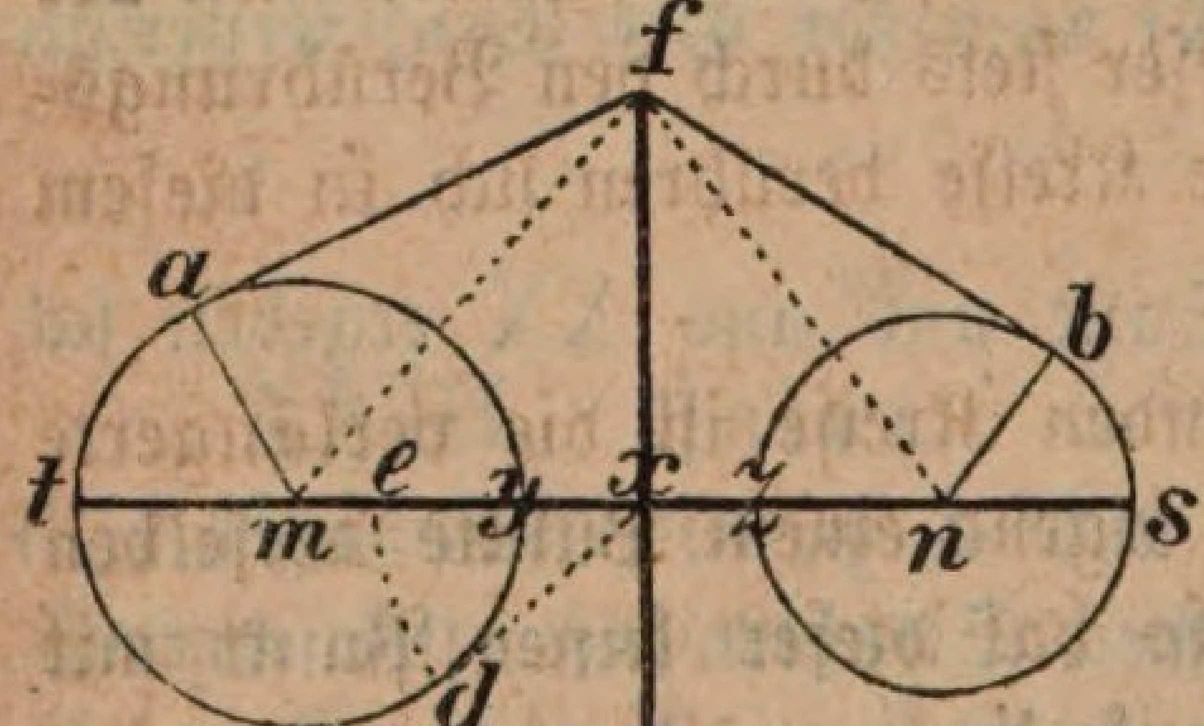
Auflösung. Es sei x der gesuchte Punkt, xa = xb seien zwei gleiche Tangenten. Dann ist

$$xa^2 = xy \cdot xt, \text{ ferner}$$
$$xb^2 = xz \cdot xs, \text{ also}$$
$$xy \cdot xt = xz \cdot xs \text{ und}$$
$$xy : xz = xs : xt.$$

Die Entfernungen des Punktes x von den inneren Durchschnittspunkten der Centrale und der Peripherieen verhalten sich also umgekehrt, wie die Entfernungen von den äußeren Durchschnittspunkten.

XXX. Lehrsatz. Die Potenzlinie zweier Kreise, welche ganz außer einander liegen, steht senkrecht auf der Centrale.

Fig. 108.



Vor. $xy : xz = xs : xt$ (nach XXIX);
$\measuredangle\, fxy = R$; $\measuredangle\, fam = R$; $\measuredangle\, fbn = R$.

Beh. $fa = fb$.

Beweis. Es ist:

$$fa^2 = fm^2 - am^2 = fx^2 + mx^2 - am^2$$
$$= fx^2 + (my + yx)^2 - am^2$$
$$= fx^2 + (my + yx)^2 - my^2$$
$$= fx^2 + yx\,(yx + 2my) = fx^2 + yx \cdot xt.$$

Ebenso erhält man:

$$fb^2 = fx^2 + xz(xz + 2zn) = fx^2 + xz \,.\, xs.$$

Da nach der Voraussetzung $yx \,.\, xt = xz \,.\, xs$ ist, so ist folglich

$$fb = fa.$$

XXXI. Zusatz. Zieht man aus x die Tangente xd, so ist $xd^2 = xy \,.\, xt$, also $fa^2 = fx^2 + xd^2 = fx^2 + xe^2$ (wenn man $xe = xd$ macht) $= fe^2$.

Eine ähnliche Gleichung erhält man für den andern Kreis.

Es ergiebt sich aber aus der Gleichung $fa^2 = fe^2$, daß alle die Kreise, deren Mittelpunkte in der Potenzlinie liegen, und deren Radien gleich der aus dem jedesmaligen Mittelpunkte gezogenen Tangente sind, durch den Punkt e gehen müssen.

Für jeden Punkt der Potenzlinie sind aber nicht nur die zugehörigen Tangenten gleich groß, sondern auch die Rechtecke aus den Secanten und ihren oberen Abschnitten. Der Inhalt eines solchen Rechtecks heißt Potenz (daher der Name Potenzlinie).

XXXII. Zusatz. Bestimmt man in ähnlicher Weise, wie in XXIX und XXX, die Lage der Potenzlinie für beliebig liegende Kreise, so ergiebt sich Folgendes:

1) Die Potenzlinie zweier Kreise, die ganz in einander liegen, steht auf der verlängerten Centrale senkrecht und zwar in desto größerer Entfernung, je kleiner die Centrale ist. Concentrische Kreise haben keine Potenzlinie. Der Punkt, in welchem die verlängerte Centrale von der Potenzlinie geschnitten wird, läßt sich mit Hülfe einer Proportion, ähnlich der in XXIX gegebenen, bestimmen. Beschreibt man aus irgend einem Punkte der Potenzlinie mit der zugehörigen Tangente einen Kreis, so geht dieser stets durch zwei bestimmte Punkte der Centrale und ihrer Verlängerung.

2) Die Potenzlinie zweier sich berührenden Kreise ist die gemeinschaftliche Tangente. Beschreibt man aus irgend einem Punkte derselben mit der zugehörigen Tangente einen Kreis, so geht dieser stets durch den Berührungspunkt beider gegebenen Kreise, und alle jene Kreise berühren sich in diesem Punkte.

3) Die Potenzlinie zweier sich schneidenden Kreise ist die verlängerte gemeinschaftliche Sehne. Beschreibt man aus irgend einem Punkte derselben mit der zugehörigen Tangente einen Kreis, so hat dieser keinen Punkt mit der Centrale gemeinschaftlich, und alle jene Kreise liegen völlig in oder außer einander.

XXXIII. Zusatz. Aus dem Vorangehenden ergiebt sich, daß die Potenzlinie durch einen einzigen in ihr liegenden Punkt bestimmt ist, weil sie stets auf der Centrale oder deren Verlängerung senkrecht steht. Die Mitte einer gemeinschaftlichen Tangente zweier Kreise, die sich nicht berühren, ist ein solcher Punkt.

XXXIV. Lehrsätze. 1) Die drei Potenzlinien dreier Kreise haben, wenn sie nicht parallel sind, einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt.

Beweis. Der Durchschnittspunkt zweier Potenzlinien ist nothwendig ein Punkt der dritten Potenzlinie, da man aus demselben sechs gleiche Tangenten ziehen kann.

2) Die drei gemeinschaftlichen Tangenten dreier sich berührenden Kreise schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Die drei Tangenten sind zugleich Potenzlinien und schneiden sich also in einem Punkte.

3) Die drei gemeinschaftlichen Sehnen dreier sich schneidenden Kreise schneiden sich in einem Punkte.

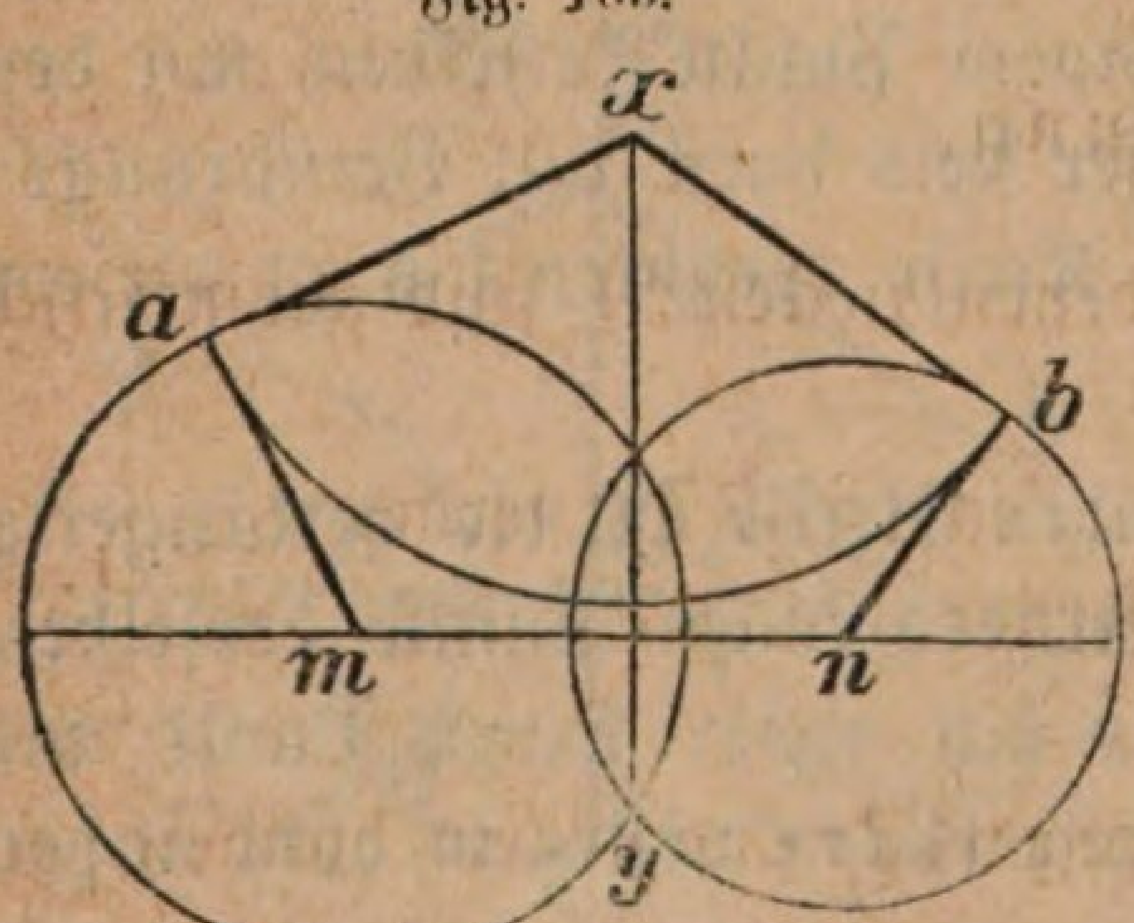
Beweis. Er wird geführt, wie der Beweis zu 2.

Anm. zu 3. Liegen zwei Kreise ganz in oder außer einander, so erhält man leicht einen Punkt der Potenzlinie, wenn man einen Kreis construirt, der beide schneidet, und dann die beiden gemeinschaftlichen Sehnen bis zu ihrem Durchschnittspunkte verlängert.

XXXV. Erklärung. Der Winkel, unter welchem sich zwei Kreise schneiden, ist derjenige, den die beiden Tangenten bilden, welche man in einem der Durchschnittspunkte an beide Kreise ziehen kann. Schneiden sich zwei Kreise rechtwinklig, so ist der nach dem Durchschnittspunkte gezogene Radius des einen zugleich Tangente des anderen.

XXXVI. Lehrsatz. Beschreibt man aus einem Punkte der Potenzlinie zweier Kreise einen dritten Kreis mit der zugehörigen Tangente, so schneidet dieser Kreis die beiden anderen rechtwinklig.

Fig. 109.



Beweis. Ist xy die Potenzlinie, und sind xa und xb zwei gleiche Tangenten, so geht der aus x mit dem Radius xa beschriebene Kreis auch durch den Punkt b, und es ist ∢ xam = R, ebenso ∢ xbn = R.

Anm. Es ergiebt sich hieraus zugleich, daß der Mittelpunkt eines Kreises, der zwei andere rechtwinklig schneidet, in der Potenzlinie dieser beiden Kreise liegen muß.

XXXVII. Lehrsätze. 1) Zwei Kreise, die zwei andere ganz außer einander liegende Kreise rechtwinklig schneiden, müssen sich selbst schneiden.

Beweis. Die Mittelpunkte der ersteren Kreise liegen in der Potenzlinie, und diese Kreise müssen daher durch dieselben zwei Punkte der Centrale gehen (XXXI und XXXII, 1).

2) Zwei Kreise, welche zwei andere sich schneidende rechtwinklig schneiden, liegen ganz außer oder in einander.

Beweis. Er folgt aus XXXII, 3.

3) Zwei Kreise, welche zwei andere sich berührende Kreise rechtwinklig schneiden, berühren sich ebenfalls.

Beweis Er folgt aus XXXII, 2.

4) Zwei Kreise, die von zwei anderen Kreisen rechtwinklig geschnitten werden, welche entweder ganz außer oder in einander liegen, oder sich berühren, oder sich schneiden, müssen sich im ersteren Falle schneiden, im zweiten sich berühren, im dritten ganz außer oder in einander liegen. Außerdem sind die Centralen der ersteren Kreise Potenzlinien der anderen, und umgekehrt.

Beweis. Er ergiebt sich indirekt aus den vorangehenden Sätzen (1—3).

5) Wenn ein beliebiger Kreis zwei andere rechtwinklig schneidet, so haben die vier Durchschnittspunkte stets eine solche gegenseitige Lage, daß sich vier Kreise beschreiben lassen, von denen jeder die gegebenen Kreise in zweien dieser Punkte berührt.

Beweis. Er ergiebt sich aus dem Vorangehenden.

Vierzehntes Capitel.

Von der Ausmessung der regulären necke und des Kreises.

A. Von der Ausmessung der regulären necke.

§. 158. Erklärung.

Von den in und um den Kreis beschriebenen necken*) sind geometrisch construirbar:

1) Das 3, 6, 12 . . . . eck, 4, 8, 16 . . . eck (§. 77); ferner

2) das 5, 10, 20 . . . . eck (§. 153); ferner

*) Da gegenwärtiges Capitel nur von regulären necken handelt, so ist diese Bezeichnung meistens weggelassen.

3) das 15eck, dessen Centriwinkel (24^0) als Differenz aus den Centriwinkeln des 6ecks (60^0) und 10ecks (36^0) erhalten wird, das 30, 60 . . . eck.

Anm. Außerdem lassen sich (Lehrsatz von Gauß) alle diejenigen necke construiren, bei welchen n eine Primzahl und von der Form $2^x + 1$ ist. Dies sind nach jetziger Kenntniß die Zahlen 3, 5, 17, 257, 65537.

§. 159. Aufgaben.

Aus dem Radius r eines Kreises zu berechnen:

1) die Seite s des eingeschriebenen Sechsecks;

2) „ „ v „ „ Vierecks;

3) „ „ d „ „ Dreiecks;

4) „ „ z „ „ Zehnecks.

Auflösung zu 1. Es ist $s = r$ (§. 78).

Auflösung zu 2. Es ist $v^2 = r^2 + r^2$ (§§. 77 und 106), also $v = r\sqrt{2}$.

Auflösung zu 3. Construirt man über einem Durchmesser ein (rechtwinkliges) Dreieck, dessen eine Cathete die Sechsecksseite ist, so ist die andere die Dreiecksseite. Es ist folglich

$$4r^2 = d^2 + s^2 = d^2 + r^2, \text{ daher } d^2 = 3r^2,\ d = r \cdot \sqrt{3}.$$

Auflösung zu 4. Es ist $r : z = z : (r - z)$ (§. 153), daher

$$z^2 + rz = r^2.$$

$$\text{Folglich ist } z = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = r \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Anm. Die gefundenen Lösungen können auch zur Bestimmung des Radius benutzt werden. Man erhält aus denselben die Gleichungen:

$$1)\ r = s;\quad 2)\ r = v : \sqrt{2} = v \cdot \frac{\sqrt{2}}{2};\quad 3)\ r = d : \sqrt{3} = d \cdot \frac{\sqrt{3}}{3};$$

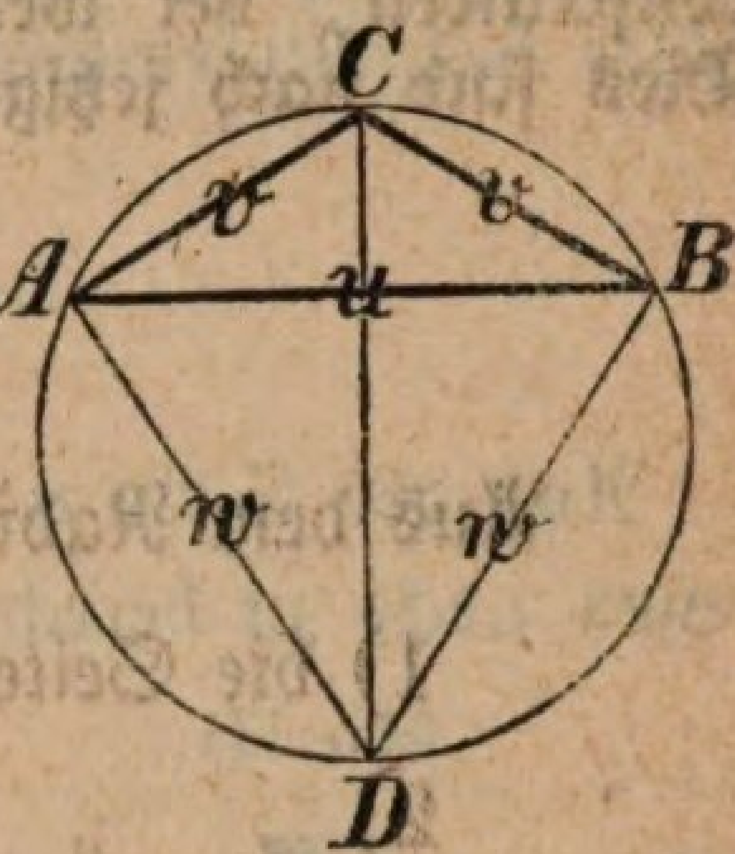
$$4)\ r = z \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{2z(1 + \sqrt{5})}{(-1 + \sqrt{5})(1 + \sqrt{5})} = z \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

§. 160. Aufgabe.

Aus der Seite u eines eingeschriebenen necks die Seite v des eingeschriebenen 2necks zu berechnen, und umgekehrt.

Auflösung. Ist $AB = u$ die Seite des necks, $AC = BC = v$ die Seite des 2necks, $CD = 2r$ der Durchmesser, und bezeichnet man endlich $AD = BD$ durch w, so ist

Fig. 110.



$AC . DB + CB . AD = CD . AB$ (§. 156), oder

$$2vw = 2ru, \text{ oder}$$
$$v^2w^2 = r^2u^2.$$

Nun ist ferner $w^2 = 4r^2 - v^2$, daher

$$v^2(4r^2 - v^2) = r^2u^2, \text{ oder}$$
$$v^4 - 4r^2v^2 = - r^2u^2.$$

Folglich ist 1) $v = \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - u^2}}$;

$$2)\ u = \frac{v}{r}\sqrt{4r^2 - v^2}.$$

Kennt man nun $u = r . p$ (§. 159), so ist nach 1)

$$3)\ v = r . \sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}},$$

und kennt man $v = r . q$, so ist nach 2)

$$4)\ u = r . q\sqrt{4 - q^2}.$$

Aus der Seite des Sechsecks $(s = r)$ erhält man nach 3) für die Seite des Zwölfecks den Werth $r . \sqrt{2 - \sqrt{3}}$, ferner hieraus für die Seite des Vierundzwanzigecks den Werth $r . \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$. — Aus der Seite des Zehnecks $\left(z = r . \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)$ erhält man nach 4) für die Seite f des Fünfecks den Werth

$$f = r . \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} . \sqrt{4 - \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = r . \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Anm. 1. In der Gleichung 1) hat der Ausdruck $\sqrt{4r^2 - u^2}$ das negative Vorzeichen erhalten, weil die Seite des 2necks nicht größer als der Radius sein kann.

Durch den zweiten Werth $\sqrt{2r^2 + r\sqrt{4r^2 - u^2}}$ wird die Größe von w bestimmt, und der vollständige Werth $\sqrt{2r^2 \mp r\sqrt{4r^2 - u^2}}$ bezeichnet die Sehne (v oder w), deren Bogen halb so groß ist, als der Bogen der Sehne AB.

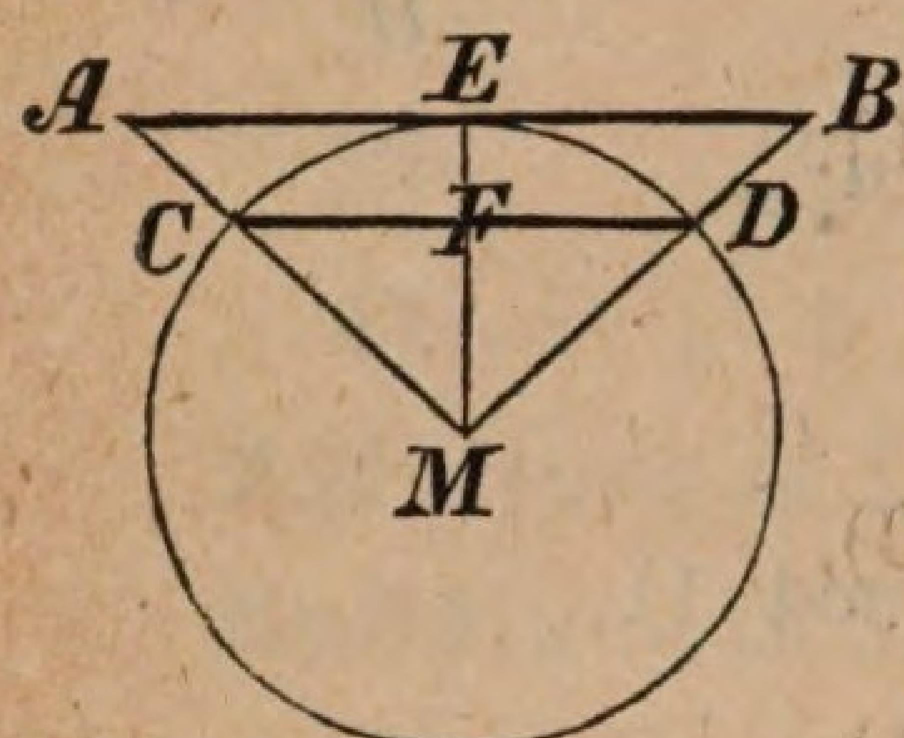
Anm. 2. Aus den oben für f und z angegebenen Werthen ergiebt sich, daß $f^2 = z^2 + r^2 = z^2 + s^2$ ist.

Anm. 3. Die Aufgabe, aus den Seiten des Zehnecks und des Sechsecks die Seite des Funfzehnecks zu berechnen (§. 158), wird in ähnlicher Art mit Hülfe des Ptolemäischen Lehrsatzes gelöst.

§. 161. Aufgabe.

Aus der Seite u eines eingeschriebenen $n$ecks die Seite x des umgeschriebenen $n$ecks zu berechnen.

Fig. 111.



Auflösung. Ist AB = x die Seite des umgeschriebenen, CD = u die Seite des eingeschriebenen $n$ecks, und wird EM = r, FM = z gesetzt, so ist

$$x : u = r : z, \text{ also } x = \frac{u \cdot r}{z}.$$

Nun ist $z^2 = r^2 - \frac{u^2}{4}$, oder $z = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - u^2}$,

$$\text{daher } x = \frac{2ur}{\sqrt{4r^2 - u^2}}.$$

Setzt man ferner $u = r \cdot p$ (§. 159), so ist $x = \frac{2rp}{\sqrt{4 - p^2}}$.

Mit Hülfe dieser Gleichung erhält man aus der Seite des eingeschriebenen $2n$ecks, also aus

$$v = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}} = r \cdot q$$

die Seite y des umgeschriebenen $2n$ecks. Es ist nämlich

$$y = \frac{2rq}{\sqrt{4 - q^2}} = \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}}}$$

$$= \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{4 - p^2}}} = r \cdot \frac{2p}{2 + \sqrt{4 - p^2}}.$$

Anm. Aus der Gleichung $x = \frac{2ur}{\sqrt{4r^2 - u^2}}$ erhält man ferner die umgekehrte Auflösung $u = \frac{2xr}{\sqrt{4r^2 + x^2}}$. Ist also $x = r \cdot P$, so ist $u = r \cdot \frac{2P}{\sqrt{4 + P^2}}$.

§. 162. Zusatz.

Werden die Seiten der eingeschriebenen und umgeschriebenen regulären $n$ecke und $2n$ecke beziehlich durch e_n, u_n, e_{2n}, u_{2n} bezeichnet, so sind die Beziehungen zwischen diesen Größen durch folgende Gleichungen gegeben:

1) Ist $e_n = r \cdot p$, so ist

$$e_{2n} = r \cdot \sqrt{2 - \sqrt{4 - p^2}} \quad (\S.\ 160),$$

$$u_n = r \cdot \frac{2p}{\sqrt{4 - p^2}} \quad (\S.\ 161),$$

$$u_{2n} = r \cdot \frac{2p}{2 + \sqrt{4 - p^2}} \quad (\S.\ 161).$$

2) Ist $e_{2n} = r \cdot q$, so ist

$$e_n = r \cdot q \cdot \sqrt{4 - q^2} \quad (\S.\ 160),$$

$$u_{2n} = r \cdot \frac{2q}{\sqrt{4 - q^2}} \quad (\S.\ 161).$$

3) Ist $u_n = r \cdot P$, so ist

$$e_n = r \cdot \frac{2P}{\sqrt{4 + P^2}} \quad (\S.\ 161).$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die übrigen noch fehlenden leicht ableiten.

§. 163. Aufgabe.

Aus der Seite des eingeschriebenen $n$ecks ($e_n = r \cdot p$) den Inhalt des eingeschriebenen $n$ecks und $2n$ecks, ferner des umgeschriebenen $n$ecks und $2n$ecks zu berechnen.

Auflösung. Der Inhalt eines umgeschriebenen regulären $n$ecks wird erhalten, wenn man den halben Umfang mit dem Abstande einer Seite vom Mittelpunkte, also mit dem Radius multiplicirt. Da ferner die eingeschriebenen und umgeschriebenen regulären $n$ecke von gleicher Seitenzahl einander ähnlich sind, und ihre Inhalte sich demnach verhalten, wie die Quadrate der Seiten, so lassen sich auch die Inhalte der eingeschriebenen Figuren mit Hülfe des vorigen §. leicht berechnen. Bezeichnet man den Inhalt des eingeschriebenen $n$ecks, $2n$ecks, ferner des umgeschriebenen $n$ecks und $2n$ecks beziehlich durch E_n, E_{2n}, U_n, U_{2n}, so erhält man, wenn man die angegebenen Rechnungen ausführt, folgende Gleichungen:

$$E_n = r^2 \cdot \frac{np\sqrt{4-p^2}}{4},$$

$$E_{2n} = r^2 \cdot \frac{np}{2},$$

$$U_n = r^2 \cdot \frac{np}{\sqrt{4-p^2}},$$

$$U_{2n} = r^2 \cdot \frac{2np}{2+\sqrt{4-p^2}}.$$

Für das eingeschriebene Sechseck ist $p = 1$, also

$$E_6 = \frac{6}{4}\sqrt{3} \cdot r^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}.r^2.$$

Für das umgeschriebene Viereck ist $p = \sqrt{2}$, also

$$U_4 = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot r^2 = 4r^2.$$

§. 164. Zusatz.

Vergleicht man die Resultate des vorigen §., so ergeben sich folgende Beziehungen. Es ist

$$1)\ E_{2n} = \sqrt{E_n \cdot U_n},$$

$$2)\ U_{2n} = \frac{2 \cdot E_{2n} \cdot U_n}{E_{2n} + U_n}.$$

Die Fläche des eingeschriebenen 2necks ist also das geometrische Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen und umgeschriebenen necks, und die Fläche des umgeschriebenen 2necks ist das harmonische*) Mittel zwischen den Flächen des eingeschriebenen 2necks und umgeschriebenen necks.

B. Von der Rectification und der Quadratur des Kreises.

§. 165. Erklärung.

Unter der Rectification des Kreises versteht man die Berechnung seines Umfanges, unter der Quadratur die seines Inhaltes.

*) Arithm. I, §. 128.

Zur Auffindung des Inhaltes gelangt man durch die Vergleichung der Inhalte für die eingeschriebenen und umgeschriebenen regulären Vielecke. Die Inhalte eines eingeschriebenen und umgeschriebenen necks unterscheiden sich nämlich desto weniger von einander, je größer n ist, und für einen großen Werth von n ist dieser Unterschied so gering, daß man ihn vernachlässigen kann. Folgende Beispiele mögen dies veranschaulichen:

n	E_n	U_n
4	$r^2 . 2,00000 \ldots;$	$r^2 . 4,00000 \ldots;$
8	$r^2 . 2,82842 \ldots;$	$r^2 . 3,31370 \ldots;$
16	$r^2 . 3,06146 \ldots;$	$r^2 . 3,18259 \ldots;$
128	$r^2 . 3,14033 \ldots;$	$r^2 . 3,14222 \ldots;$
1024	$r^2 . 3,14158 \ldots;$	$r^2 . 3,14160 \ldots.$

Aus dem letzten Beispiele ergiebt sich, daß der Inhalt eines Kreises zwischen den Gränzen $3,14158 . r^2$ und $3,14160 . r^2$ liegen muß.

Durch Fortsetzung der angegebenen Rechnung, (statt deren indeß ein späteres Capitel bequemere Mittel bietet*), gelangt man zu noch engeren Gränzen. Man erhält alsdann für den Inhalt des Kreises den Werth

$$r^2 . 3,14159265358979323846 \ldots$$

Der irrationale, nicht periodische Decimalbruch 3,14159... heißt auch die Ludolfsche Zahl und wird durch den Buchstaben π bezeichnet. Es ist also $I = r^2\pi$.

Bezeichnet man die Peripherie des Kreises durch P, so ist

$$I = r^2\pi = \frac{P . r}{2} \text{ (§. 103, 5), folglich}$$

$$P = 2r\pi.$$

Man erhält also den Umfang eines Kreises, wenn man den Durchmesser mit π multiplicirt, und umgekehrt bezeichnet die Zahl π das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser.

Anm. Für die Praxis ist der Näherungswerth $3\frac{1}{7}$ (Archimedes), oder der noch genauere $\frac{377}{120}$ (Ptolemäus) meistens ausreichend. Der Werth $3\frac{1}{7} = 3,14285 \ldots$ weicht von dem wirklichen Werthe 3,14159 ... weniger ab, als der Näherungswerth 3,14.

---

*) Arithmetik II, Cap. VIII, E.

§. 166. Zusatz.

Aus vorigem §. ergeben sich noch folgende Sätze:

1) Die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie die Radien.

2) Die Flächen zweier Kreise verhalten sich wie die Quadrate der Radien.

3) Ein Kreis hat denselben Umfang, wie verschiedene andere Kreise zusammen, wenn sein Radius gleich der Summe der übrigen Radien ist.

4) Ein Kreis hat denselben Inhalt, wie verschiedene andere Kreise zusammen, wenn das Quadrat seines Radius gleich der Summe der Quadrate der übrigen Radien ist.

5) Ein Kreis hat zum Inhalt den Unterschied zweier Kreisflächen, wenn das Quadrat seines Radius gleich der Differenz der Quadrate der beiden anderen Radien ist.

Anm. Mit Hülfe dieser Sätze und der in §§. 107 und 110 angegebenen Constructionen lassen sich folgende und ähnliche Aufgaben lösen:

a) Einen Halbkreis, Quadranten, Sextanten u. s. w in einen Kreis zu verwandeln.

b) Einen Kreis durch concentrische Kreislinien in m gleiche Theile zu theilen.

c) Einen Kreis so in m gleiche Theile zu theilen, daß der Umfang eines jeden Theiles gleich dem Kreisumfange ist.

d) Einen Kreis in eine ringförmige Figur von gegebenem äußeren Umfange zu verwandeln.

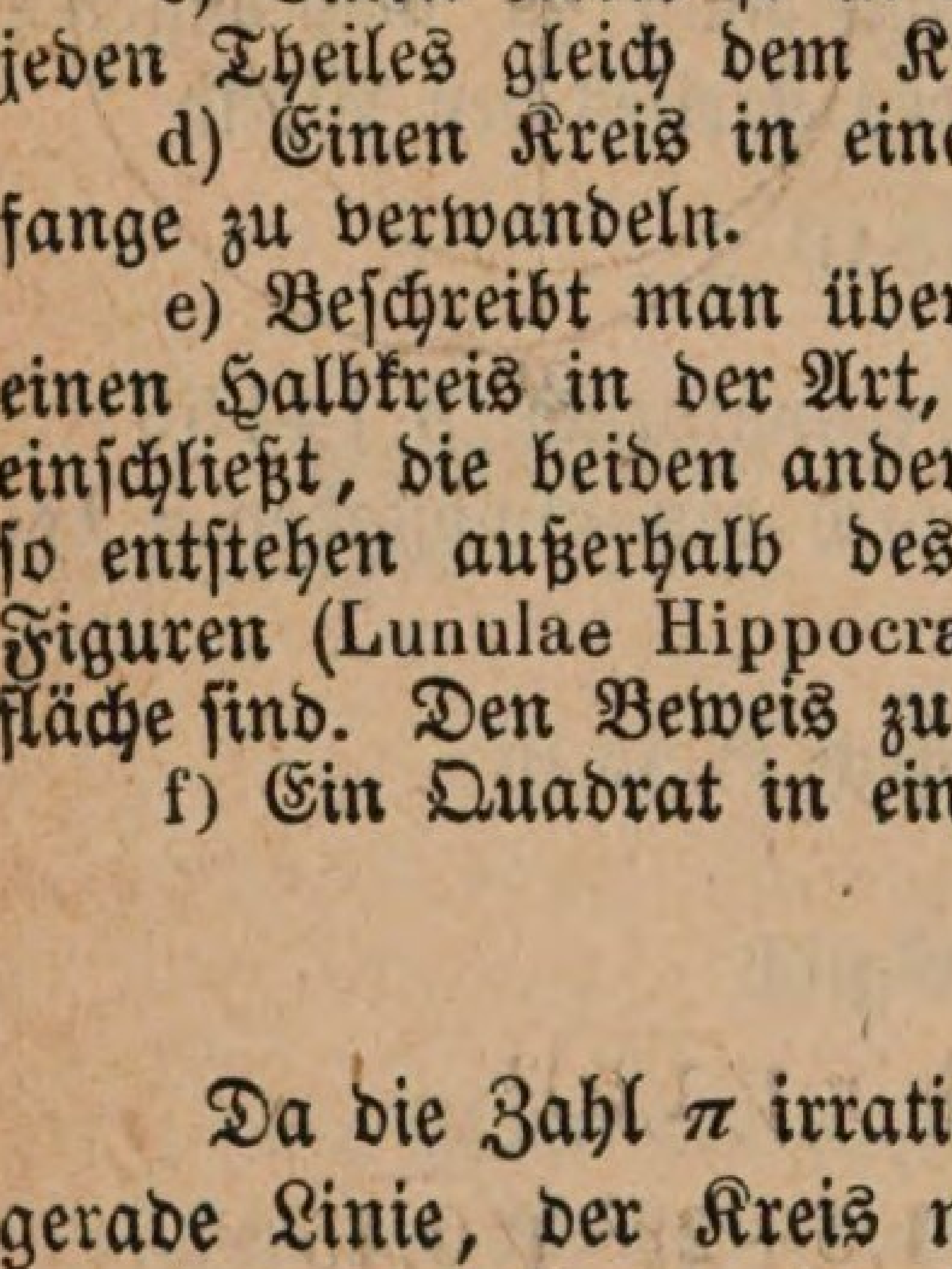
e) Beschreibt man über den drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks je einen Halbkreis in der Art, daß der Halbkreis über der Hypotenuse das Dreieck einschließt, die beiden anderen Halbkreise aber außerhalb des Dreiecks liegen, so entstehen außerhalb des zuerst genannten Halbkreises zwei mondförmige Figuren (Lunulae Hippocratis), deren Inhalte zusammen gleich der Dreiecksfläche sind. Den Beweis zu führen.

f) Ein Quadrat in eine mondförmige Figur zu verwandeln.

§. 167. Zusatz.

Da die Zahl π irrational ist, so läßt sich die Peripherie nicht genau als gerade Linie, der Kreis nicht genau als Quadrat darstellen. Beide Aufgaben lassen sich jedoch mit annähernder Genauigkeit durch nachstehende Constructionen lösen.

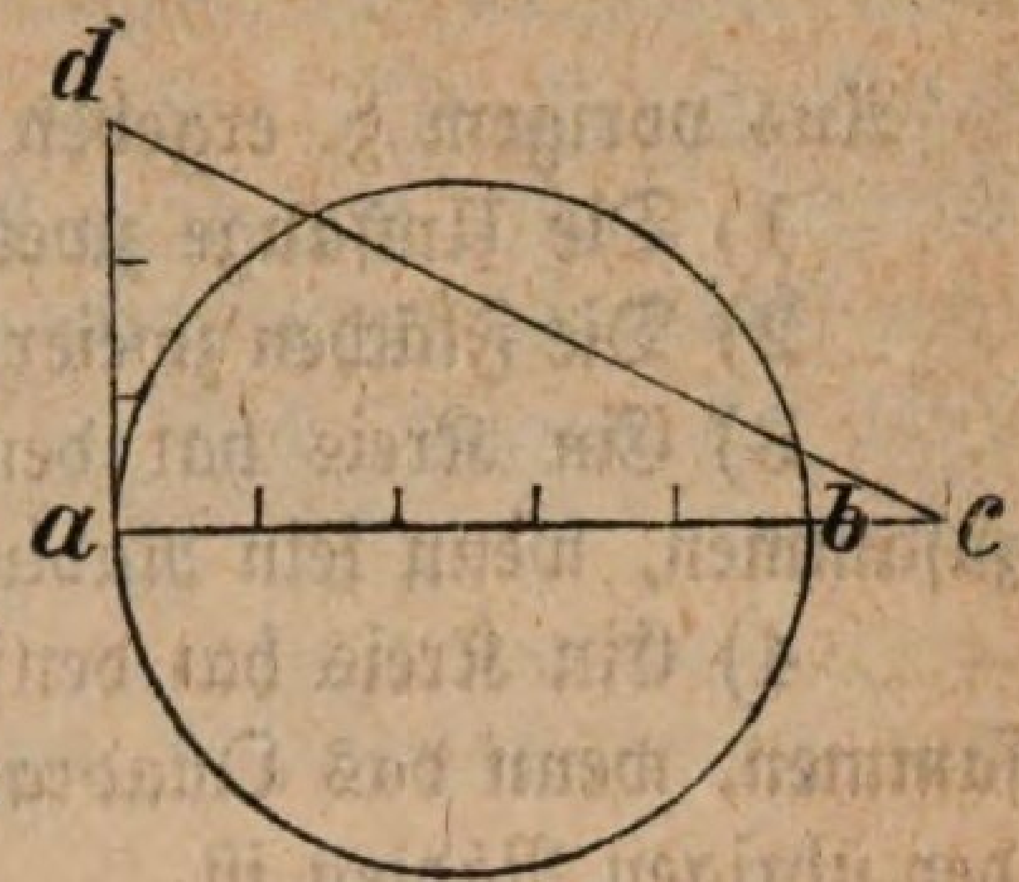
Fig. 112.



1) Soll die Peripherie eines Kreises als gerade Linie dargestellt werden, so verlängere man (Fig. 112) den Durchmesser ab um das Stück $bc = \frac{1}{5}ab$, errichte aus a die Senkrechte $ad = \frac{3}{5}ab$ und verbinde d mit c. Alsdann ist

$$ad + ac + dc = P.$$

Fig. 113.



Beweis. Ist $ab = D$, so ist $ac = \frac{6}{5}D$, $ad = \frac{3}{5}D$, also

$$dc = \sqrt{(\tfrac{6}{5}D)^2 + (\tfrac{3}{5}D)^2} = D \cdot \sqrt{\tfrac{9}{5}},$$

oder $dc = D \cdot 1{,}3416407 \ldots$

Es ist also $ac = 1{,}2000000 \ldots D$,

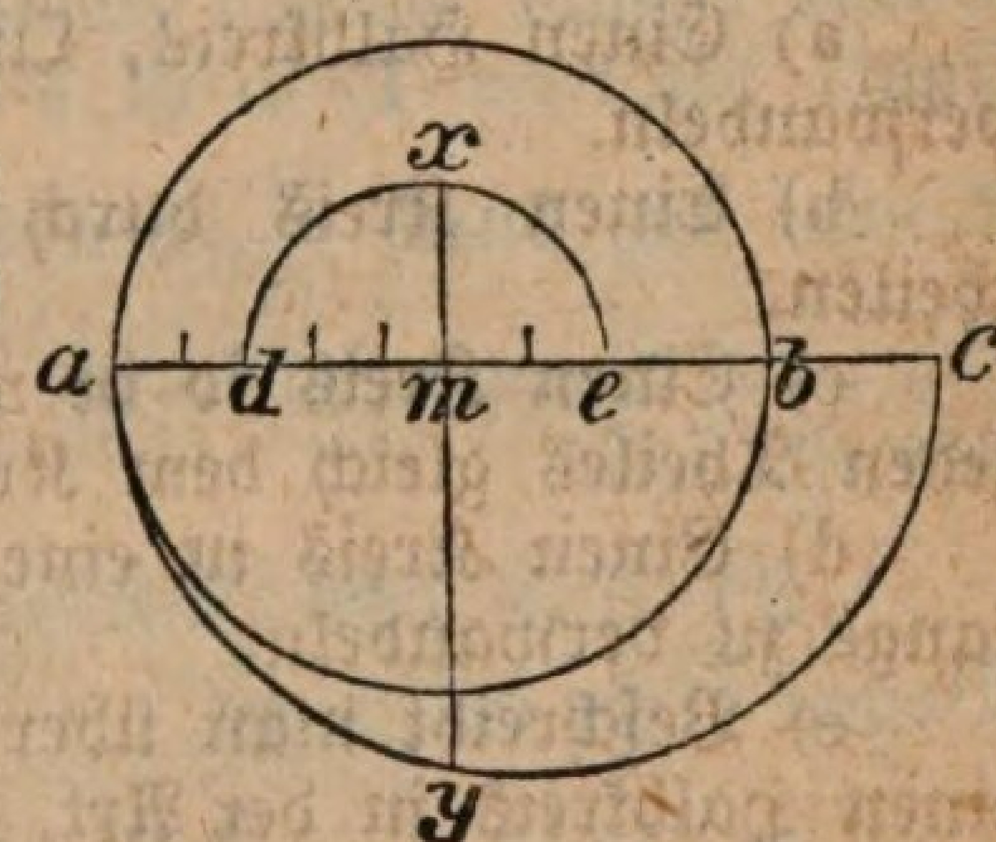
$ad = 0{,}6000000 \ldots D$,

$dc = 1{,}3416407 \ldots D$,

daher $ac + ad + dc = 3{,}1416407 \ldots D$.

2) Soll die Fläche eines Kreises als Quadrat dargestellt werden, so ziehe man den Durchmesser amb, theile am in fünf, mb in zwei gleiche Theile und verlängere mb um seine Hälfte bis c.

Fig. 114.



Beschreibt man nun einen Halbkreis über $de (ad = \frac{2}{5}r)$, ebenso einen Halbkreis über $ac (ac = 2\frac{1}{2}r)$, so ist die im Punkte m auf ab errichtete Senkrechte xy gleich der Seite des gesuchten Quadrates.

Beweis. Es ist:

$$xm^2 = dm \cdot me = \tfrac{3}{5}r \cdot \tfrac{1}{2}r = \frac{3}{10}\,r^2, \text{ also}$$

$$xm = r \cdot \sqrt{0{,}3}.$$

Ferner ist $ym^2 = am \cdot mc = r \cdot \frac{3}{2}r$, also

$$ym = r \cdot \sqrt{1{,}5}.$$

Es ist also $(xm + ym)^2 = (r \cdot \sqrt{0{,}3} + r\sqrt{1{,}5})^2$

$$= r^2 . 0{,}3 + r^2 . 1{,}5 + 2r^2 \sqrt{0{,}45}$$

$$= r^2 . 0{,}3 + r^2 . 1{,}5 + r^2 . 1{,}3416407\ldots,$$

oder $xy^2 = r^2 \cdot 3{,}1416407 \ldots\ldots$

§. 168. Lehrsätze.

1) Zwei Bogen desselben Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Mittelpunktswinkel.

2) Zwei Ausschnitte desselben Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Bogen oder Mittelpunktswinkel.

Beweis zu 1. Sind beide Mittelpunktswinkel commensurabel, ist also irgend ein Winkel x in dem einen Mittelpunktswinkel mmal, im anderen

nmal enthalten, so verhalten sich beide Winkel wie m : n, ebenso aber auch die Bogen (§. 63). Sind beide Winkel incommensurabel, so führt man den Beweis ähnlich, wie in §. 99.

Beweis zu 2. Er wird ähnlich geführt, wie der Beweis zu 1), und stützt sich darauf, daß zu gleichen Mittelpunktswinkeln gleiche Ausschnitte gehören.

§. 169. Aufgaben.

1) Aus dem Radius r und dem Bogen b den zugehörigen Centriwinkel x zu berechnen.

Auflösung. Es ist $b : 2r\pi = x : 360$, daher $x = \frac{b}{r\pi} \cdot 180$.

Anm. Es ergiebt sich hieraus, daß Bogen zur Bezeichnung der Centriwinkel benutzt werden können, sobald sie auf den nämlichen Radius bezogen sind. Ist $r = 1$, so ist $P = 2\pi$, und man bezeichnet daher durch 2π den Winkel 4R, durch $\frac{\pi}{m}$ den Winkel $\frac{2R}{m}$. Ebenso, wie die Centriwinkel, lassen sich auch Peripheriewinkel, Sehnenwinkel u. s. w. durch ihre Bogen bezeichnen (§. 71).

2) Aus dem Radius r und dem Centriwinkel x den zugehörigen Bogen b zu berechnen.

Auflösung. Es ist $b : 2r\pi = x : 360$, also $b = \frac{x}{180} r\pi$.

Anm. Bei gleichen Centriwinkeln verhalten sich Bogen verschiedener Kreise wie ihre Radien.

3) Aus dem Radius r und dem Centriwinkel x (oder dem Bogen b) den Inhalt I des zugehörigen Sectors zu berechnen.

Auflösung. Es ist $I : r^2\pi = x : 360 = b : 2r\pi$, daher $I = \frac{x}{360} r^2\pi$, oder $I = \frac{br}{2}$.

Anm. Bei gleichen Centriwinkeln verhalten sich Sectoren verschiedener Kreise wie die Quadrate ihrer Radien. — Ein Sector ist gleich einem Dreiecke, gebildet aus dem Bogen als Grundlinie und dem Radius als Höhe.

Aufgaben. *)

1) Wie groß ist die Peripherie und wie groß der Inhalt eines Kreises, dessen Radius 7′ 6″ beträgt?
2) Wie groß ist die Peripherie und wie groß der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser 1° 7′ 9″ beträgt?

*) Es ist überall Decimalmaß zu nehmen.

3) Die Peripherie eines Kreises beträgt 4′ 2″. Wie groß ist der Inhalt und wie groß der Durchmesser?
4) Der Inhalt eines Kreises beträgt 11 Q°, 3 Q′, 7 Q″, 19 Q‴. Wie groß ist der Durchmesser und wie groß die Peripherie?
5) Wie groß ist der Bogen und wie groß der Kreisausschnitt zu dem Durchmesser 12′ 6″ und dem Mittelpunktswinkel 37° 18′?
6) Wie groß ist der Bogen und wie groß der Kreisausschnitt zu dem Durchmesser 1′ 7″ und dem Mittelpunktswinkel 44° 18′ 19″?
7) Die Länge eines Bogens beträgt 4′ 3″ 2‴, die Länge des Kreisdurchmessers 9° 7′ 4″ 6‴. Wie groß ist der Mittelpunktswinkel und der Inhalt des Kreisausschnittes?
8) Für welchen Mittelpunktswinkel ist der Bogen so groß wie der Halbmesser?
9) Der Halbmesser eines Kreises beträgt 9′ 7″, der Mittelpunktswinkel eines Ausschnittes 60°. Wie groß ist der zugehörige Abschnitt?
10) Die Ringfläche zwischen zwei concentrischen Kreisen beträgt 42 Q′, der Halbmesser des inneren Kreises 9′. Wie breit ist der Ring?
11) Ein concentrischer Ring enthält 87 Q′ 3 Q″, seine Breite beträgt 3′. Wie groß ist der Halbmesser des kleineren Kreises?

Aus dem Radius r die Seite zu finden für das reguläre eingeschriebene

12) 8eck; 13) 16eck; 14) 32eck; 15) 20eck; 16) 40eck;

ferner die Seite für das reguläre umgeschriebene

17) 3eck; 18) 6eck; 19) 12eck; 20) 4eck; 21) 8eck; 22) 16eck;
23) 5eck; 24) 10eck;

ferner den Inhalt für das reguläre eingeschriebene

25) 3eck; 26) 6eck; 27) 12eck; 28) 24eck; 29) 5eck; 30) 10eck;

ferner den Inhalt für das reguläre umgeschriebene

31) 3eck; 32) 6eck; 33) 12eck; 34) 5eck; 35) 10eck.

Auflösungen.

1) P = 4° 7, 7,5…″; I = 1 Q° 81 Q′ 45,8… Q″;
2) P = 5° 6′ 2,3…″; I = 2 Q° 51 Q′ 64,9… Q″;
3) D = 1′ 3,3…″; I = 1 Q′ 40,3… Q″;
4) D = 3° 7′ 4,7…″; P = 11° 7′ 7,3…″;
5) Bogen = 4′ 1,01…″; Ausschnitt = 12 Q′ 91,9… Q″;
6) Bogen = 6″ 5,72…‴; Ausschnitt = 27 Q″ 93,1… Q‴;
7) Winkel = 5° 4′ 45,5…″; Ausschnitt = 1 Q° 5 Q′ 25,6… Q″;
8) Winkel = 57° 17′ 44,8…″; 9) Abschnitt = 8 Q′ 52,3… Q″;
10) Breite = 7″ 1,4…‴; 11) Halbmesser = 3′ 1″ 1,7…‴;

12) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2}}$; 13) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

14) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$; 15) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}$;

16) $r \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})}}}$; 17) $2r \cdot \sqrt{3}$; 18) $\frac{2r \cdot \sqrt{3}}{3}$;

19) $2r \cdot (2-\sqrt{3})$; **20)** $2r$; **21)** $2r \cdot (\sqrt{2}-1)$;

22) $2r \cdot \{\sqrt{2(2+\sqrt{2})}-1-\sqrt{2}\}$; **23)** $2r \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}$;

24) $2r \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$; **25)** $\frac{3}{4}r^2 \cdot \sqrt{3}$; **26)** $\frac{3}{2}r^2 \cdot \sqrt{3}$;

27) $3r^2$; **28)** $6r^2 \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$; **29)** $\frac{5}{8}r^2 \cdot \sqrt{10+2\sqrt{5}}$;

30) $\frac{5}{4}r^2 \cdot \sqrt{10-2\sqrt{5}}$; **31)** $3r^2 \cdot \sqrt{3}$; **32)** $2r^2 \cdot \sqrt{3}$;

33) $12r^2 \cdot (2-\sqrt{3})$; **34)** $5r^2 \cdot \sqrt{5-2\sqrt{5}}$;

35) $10r^2 \cdot \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$.

Funfzehntes Capitel.

Von einigen geometrisch-algebraischen Aufgaben und von der geometrischen Construction algebraischer Formeln.

A. Von einigen geometrisch-algebraischen Aufgaben.

§. 170. Aufgaben.

I. Den Inhalt I eines Dreiecks aus den Seiten a, b, c zu berechnen.

Auflösung. Es ist $I = \frac{1}{4}\sqrt{SABC}$ (§. 117).

Ist $a = b = c$, so ist $I = \frac{1}{4}\sqrt{3a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

II. Den Inhalt I eines Dreiecks aus den drei Höhen a, b, c zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnet man die drei zugehörigen Seiten durch x, y, z, so ist $2I = ax$, $2I = by$, $2I = cz$, also $y = \frac{ax}{b}$ und $z = \frac{ax}{c}$.

Nach I. ist also $I =$

$$\frac{1}{4}\sqrt{\left(x+\frac{ax}{b}+\frac{ax}{c}\right)\left(-x+\frac{ax}{b}+\frac{ax}{c}\right)\left(x-\frac{ax}{b}+\frac{ax}{c}\right)\left(x+\frac{ax}{b}-\frac{ax}{c}\right)}.$$

Setzt man hierin $x+\frac{ax}{b}+\frac{ax}{c} = \frac{x}{bc}(bc+ac+ab)$, entsprechende

Ausdrücke für die übrigen Faktoren, so ist $I =$

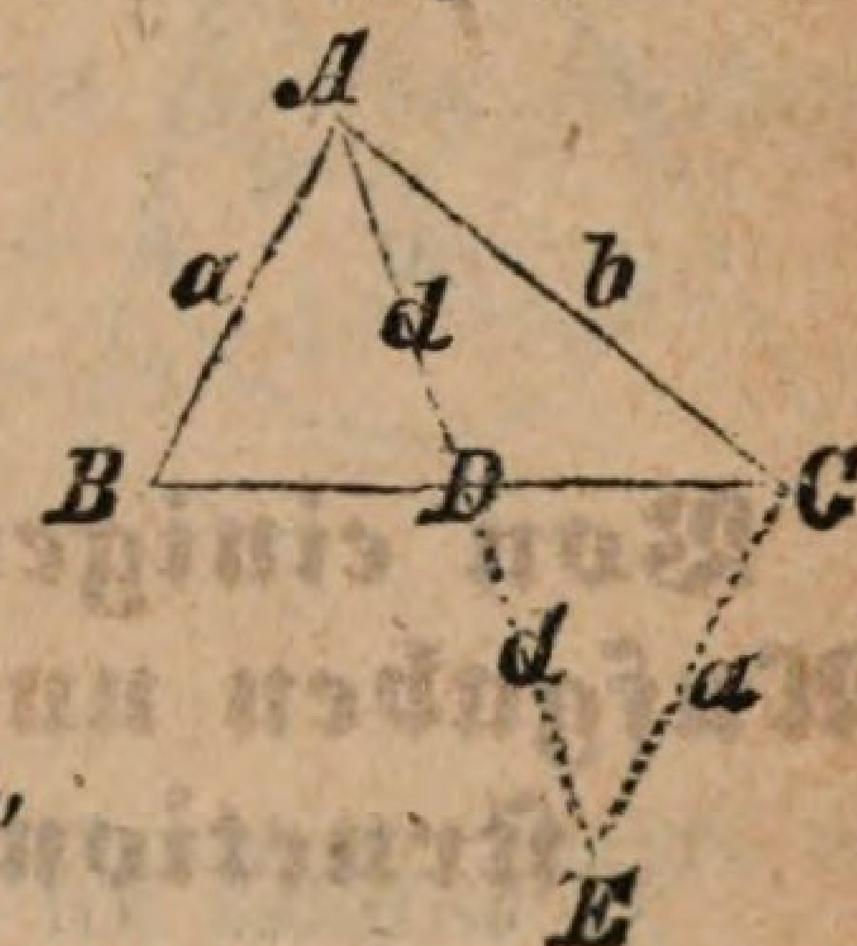
$$\frac{x^2}{4b^2c^2}\sqrt{(bc+ac+ab)(-bc+ac+ab)(bc-ac+ab)(bc+ac-ab)},$$

oder $I = \frac{x^2}{4b^2c^2} M$, wenn M den Wurzelausdruck bezeichnet.

Nun ist $x^2 = \frac{4I^2}{a^2}$, also $I = \frac{4I^2}{4a^2b^2c^2} M$, daher $I = \frac{a^2b^2c^2}{M}$.

III. Den Inhalt I eines Dreiecks ABC aus den Seiten $AB = a$, $AC = b$ und aus der Transversale $AD = d$, welche BC halbirt, zu berechnen.

Fig. 115.



Auflösung. Verlängert man $AD = d$ um sich selbst bis E, so ist

$$\triangle BDA \cong \triangle CDE,$$

also auch

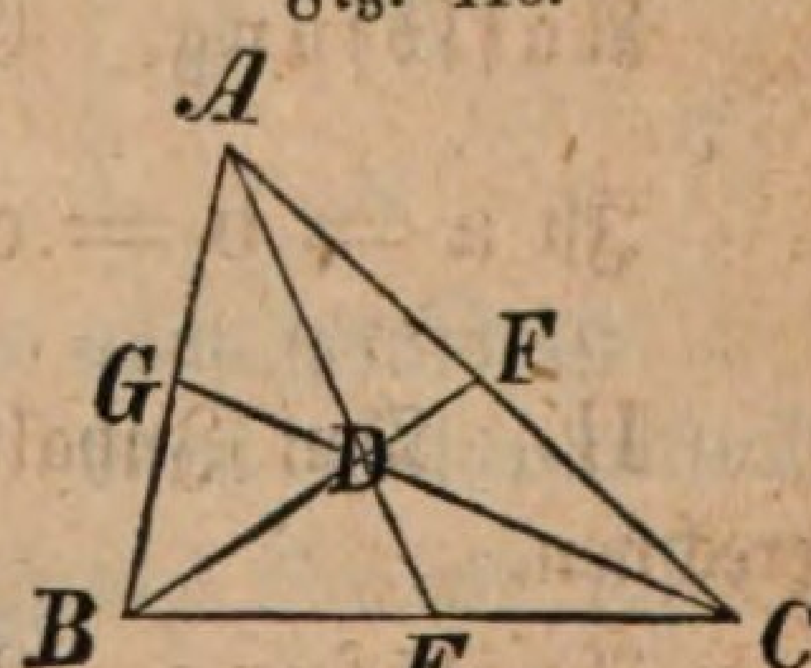
$$\triangle ABC = \triangle AEC.$$

Im Dreiecke AEC ist nun $AC = b$, $CE = a$, $AE = 2d$, daher (nach I.)

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+2d)(-a+b+2d)(a-b+2d)(a+b-2d)}.$$

IV. Den Inhalt I eines Dreiecks ABC aus den drei Transversalen $AE = d$, $BF = e$, $CG = f$, welche die Ecken mit den Mitten der Gegenseiten verbinden, zu berechnen.

Fig. 116.



Auflösung. Jede der drei Transversalen halbirt das Dreieck, und außerdem theilen sich dieselben im Verhältniß von 1 : 2 (§. 139). Es ist daher $\triangle DBC = \frac{1}{3}\triangle ABC$. Im Dreiecke DBC ist aber $DB = \frac{2}{3}e$, $DC = \frac{2}{3}f$, $DE = \frac{1}{3}d$, und es läßt sich folglich der Inhalt I' dieses Dreiecks nach III. berechnen. Es ist nun $I = 3I'$, oder (nach III.)

$$I = \tfrac{3}{4}\sqrt{(\tfrac{2}{3}d+\tfrac{2}{3}e+\tfrac{2}{3}f)(-\tfrac{2}{3}d+\tfrac{2}{3}e+\tfrac{2}{3}f)(\tfrac{2}{3}d-\tfrac{2}{3}e+\tfrac{2}{3}f)(\tfrac{2}{3}d+\tfrac{2}{3}e-\tfrac{2}{3}f)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{(d+e+f)(-d+e+f)(d-e+f)(d+e-f)}.$$

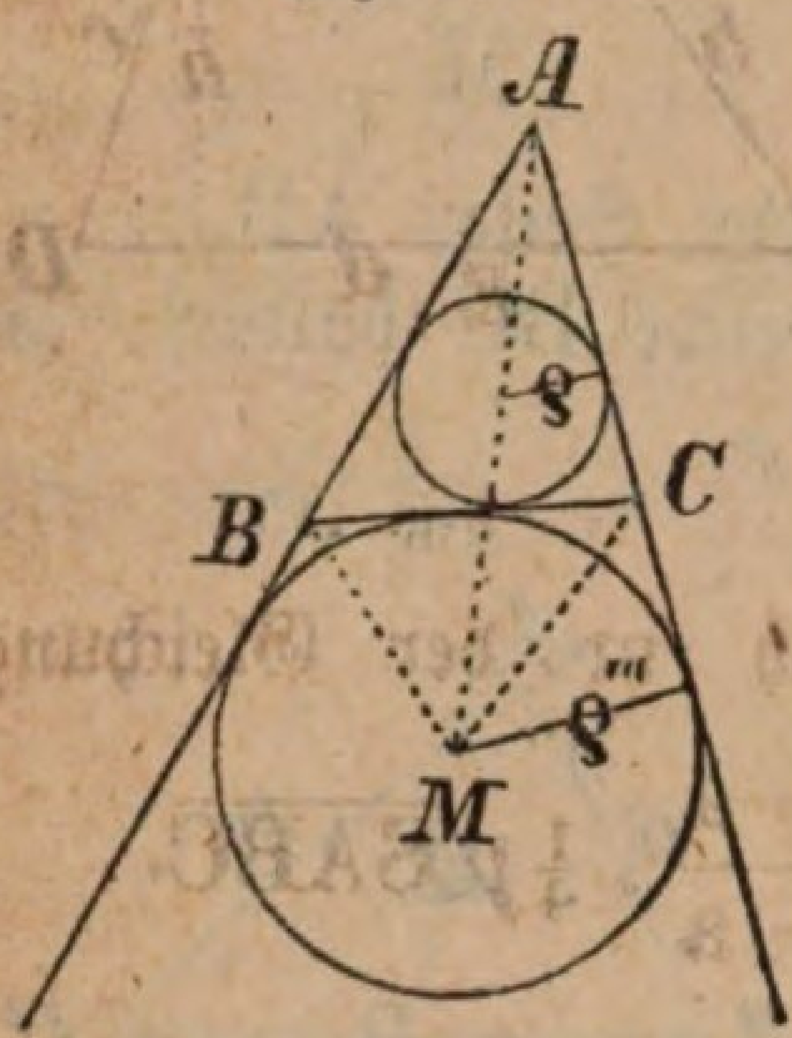
§. 171. Aufgaben.

I. Den Inhalt I eines Dreiecks aus den drei Seiten a, b, c und dem Radius r des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Es ist $I = \frac{abc}{4r}$ (nach §. 154).

II. Den Inhalt I eines Dreiecks ABC aus den drei Seiten a, b, c und einem der vier Radien $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$, welche den vier berührenden Kreisen zugehören, zu berechnen.

Fig. 117.



Auflösung. Ist AB = a, AC = b, BC = c, ist ferner ϱ der Radius des eingeschriebenen Kreises, so ist

$$1)\ I = (a + b + c) \cdot \frac{\varrho}{2} = S \cdot \frac{\varrho}{2}.$$

Ist ferner M der Mittelpunkt eines äußeren berührenden Kreises, ϱ''' der Radius, so ist

$$I = \triangle\ ABM + \triangle\ ACM - \triangle\ BCM,$$

$$= a \cdot \frac{\varrho'''}{2} + b \cdot \frac{\varrho'''}{2} - c \cdot \frac{\varrho'''}{2}, \text{ oder}$$

$$2)\ I = (a + b - c) \cdot \frac{\varrho'''}{2} = C \cdot \frac{\varrho'''}{2}.$$

In derselben Art erhält man für die anderen berührenden Kreise:

$$3)\ I = (a - b + c) \cdot \frac{\varrho''}{2} = B \cdot \frac{\varrho''}{2},$$

$$4)\ I = (-a + b + c) \cdot \frac{\varrho'}{2} = A \cdot \frac{\varrho'}{2}.$$

§. 172. Zusatz.

Verbindet man die vier in vorigem §. gefundenen Gleichungen durch Multiplication, so ist

$$I^4 = SABC \cdot \frac{\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \cdot \varrho'''}{16}.$$

Nun ist $SABC = 16 I^2$, also $I^4 = I^2 . \varrho . \varrho' . \varrho'' . \varrho'''$, daher

$$I = \sqrt{\varrho \cdot \varrho' \cdot \varrho'' \cdot \varrho'''}.$$

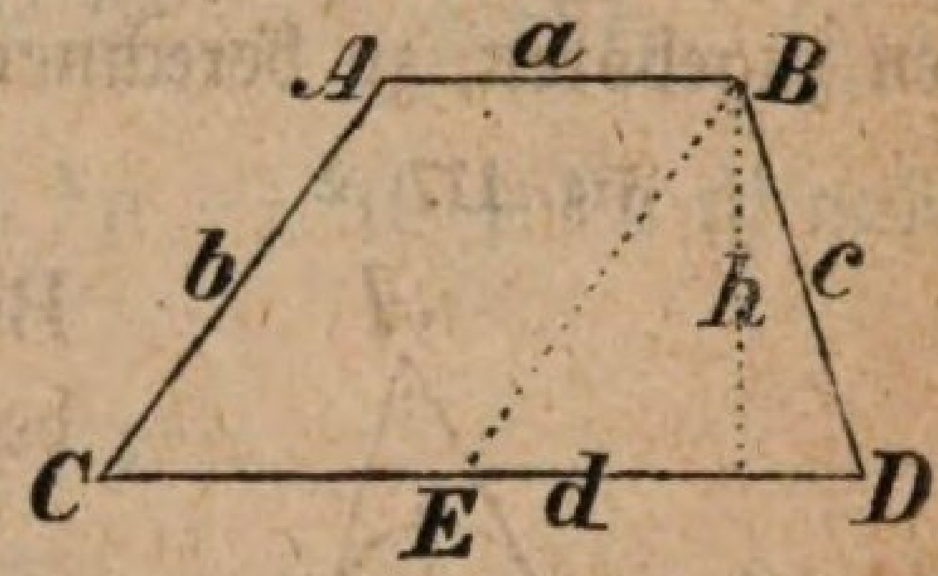
Ferner ergiebt sich aus den in vorigem §. für die vier Radien gefundenen Werthen die Gleichung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''} + \frac{1}{\varrho'''}.$$

§. 173. Aufgabe.

Den Inhalt I eines Trapezes ABCD aus den vier Seiten a, b, c, d zu berechnen.

Fig. 118.



Auflösung. Zieht man BE = b parallel AC, ferner die Höhe h, so ist im △ BED:

$$BE = b,\ BD = c,\ ED = d - a.$$

Es ist daher $\triangle\ BED = \frac{1}{4}\sqrt{SABC}$ *),

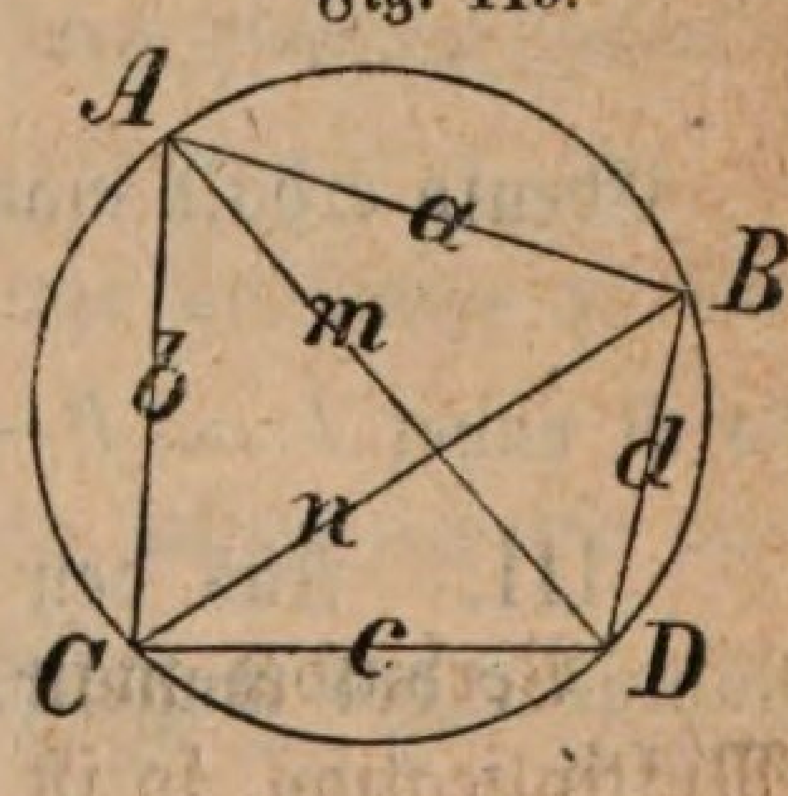
folglich $h = \frac{1}{2(d-a)} \cdot \sqrt{SABC}$.

Setzt man diesen für h gefundenen Werth in der Gleichung $I = \frac{a+d}{2} \cdot h$ (§. 103, 3) ein, so ist $I = \frac{d+a}{d-a} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{SABC}$.

§. 174. Aufgaben.

I. Aus den Seiten a, b, c, d eines eingeschriebenen Vierecks die beiden Diagonalen m und n zu berechnen.

Fig. 119.



Auflösung. Es ist $mn = ac + bd$ (§. 156), ferner $m : n = (ab+cd):(ad+bc)$ (§. 157),

daher $m = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$,

$n = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$.

II. Aus den Seiten a, b, c, d des eingeschriebenen Vierecks ABCD (Fig. 119) den Inhalt I desselben zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnet man in Fig. 119 den Inhalt des Dreiecks ABC durch I', den des Dreiecks BCD durch I'', ferner die im Dreiecke ABC zu b gehörende Höhe durch h, so ist

---

*) Es ist $S = b + c + (d - a)$, $A = - b + c + (d - a)$,
$B = b - c + (d - a)$, $C = b + c - (d - a)$.

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - n^2}{2b}\right)^2 \text{ (§. 117), oder}$$

$$4b^2h^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - n^2)^2, \text{ oder}$$

$$(4I')^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - n^2)^2.$$

Nun ist $a^2 + b^2 - n^2 = a^2 + b^2 - \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}$ (nach I.),

$$= \frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd}, \text{ folglich}$$

$$(4I')^2 = (2ab)^2 - \left[\frac{ab(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{ab + cd}\right]^2$$

$$= a^2b^2\left[2^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}\right)^2\right]$$

$$= a^2b^2\left[\left(2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}\right) \cdot \left(2 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{ab + cd}\right)\right]$$

$$= a^2b^2 \cdot \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{ab + cd} \cdot \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{ab + cd}, \text{ daher}$$

$$I' = \frac{ab}{4(ab + cd)} \cdot \sqrt{ABCD}.\text{*)}$$

Ebenso erhält man: $I'' = \frac{cd}{4(ab + cd)} \cdot \sqrt{ABCD}.$

Es ist daher $I = I' + I'' = \frac{1}{4}\sqrt{ABCD}$.

III. Aus den Seiten a, b, c, d eines eingeschriebenen Vierecks den Radius r des umgeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Es ist $I' = \frac{abn}{4r}$ und $I'' = \frac{cdn}{4r}$ (§. 171), also $I' + I'' = I = \frac{n \cdot (ab + cd)}{4r}$. Setzt man für n den in I. gefundenen Werth ein, so ist $I = \frac{\sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)}}{4r}$, daher

$$r = \sqrt{(ac + bd)(ad + bc)(ab + cd)} : ABCD.$$

*) Es ist $A = (-a + b + c + d)$, $B = (a - b + c + d)$,
$C = (a + b - c + d)$, $D = (a + b + c - d)$.

§. 175. Aufgaben.

I. Unter allen Dreiecken von gleicher Grundlinie und gleichem Umfange dasjenige zu bestimmen, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Es sei die Grundlinie = a, die Summe der beiden anderen Seiten = 2b, so lassen sich diese Seiten einzeln ausdrücken durch b + x und b — x. Nun ist nach §. 170, I:

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{(a + 2b)(2b - a)(a + 2x)(a - 2x)}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{(a + 2b)(2b - a)(a^2 - 4x^2)}.$$

In diesem Ausdrucke hat bloß der Faktor $(a^2 - 4x^2)$ einen veränderlichen Werth, und zwar ist derselbe am größten, wenn x den Werth Null hat. Ist aber x = 0, so ist das Dreieck gleichschenklig.

II. Unter allen Dreiecken von gleichem Umfange dasjenige zu bestimmen, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Ist der Umfang = 3a, so kann man, da nach I. das Dreieck gleichschenklig sein muß, die einzelnen Seiten durch a + x, $a - \frac{x}{2}$, $a - \frac{x}{2}$ bezeichnen. Es ist alsdann

$$I = \frac{1}{4}\sqrt{3a(a+x)(a+x)(a-2x)} = \frac{1}{4}\sqrt{3a[a^3 - x^2(3a + 2x)]}.$$

Dieser Ausdruck hat seinen größten Werth, wenn x = 0, also das Dreieck gleichseitig ist.

Es ergiebt sich zugleich, daß unter allen Dreiecken von gleichem Inhalte das gleichseitige den kleinsten Umfang haben muß.

III. Unter allen Rechtecken von gleichem Umfange dasjenige zu bestimmen, welches den größten Inhalt hat.

Auflösung. Ist der halbe Umfang = 2a, so lassen sich die anliegenden Seiten durch (a + x) und (a — x) bezeichnen.

Alsdann ist der Inhalt $= (a + x)(a - x) = a^2 - x^2$. Dieser Ausdruck hat seinen größten Werth, wenn x = 0, also das Rechteck ein Quadrat ist.

§. 176. Aufgaben.

I. Das Verhältniß zwischen dem Inhalte D eines gleichseitigen Dreiecks und dem Inhalte Q eines Quadrates von gleichem Umfange zu bestimmen.

Auflösung. Ist der Umfang einer jeden dieser Figuren = 3a, so ist $D = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ (§. 170, I), ferner $Q = \frac{9a^2}{16}$. Es ist also D : Q

$$= \frac{a^2}{4}\sqrt{3} : \frac{9a^2}{16} = \sqrt{3} : \frac{9}{4} = \sqrt{16} : \sqrt{27} = 1 : 1{,}299\ldots.$$

II. Das Verhältniß zwischen dem Inhalte Q eines Quadrates und dem Inhalte K eines Kreises von gleichem Umfange zu bestimmen.

Auflösung. Ist der Umfang einer jeden dieser Figuren $= a$, so ist $Q = \frac{a^2}{16}$, $K = \frac{a^2}{4\pi}$. Es ist also $Q : K = \frac{a^2}{16} : \frac{a^2}{4\pi} = 3{,}14159\ldots : 4 = 1 : 1{,}273\ldots$

B. Von der geometrischen Construction algebraischer Formeln.

§. 177. Erklärung.

Geometrische Aufgaben lassen sich im Allgemeinen auf zwei verschiedene Arten lösen: entweder bestimmt man die unbekannten Größen auf dem Wege der Construction, oder man bestimmt ihre Maßzahlen auf dem Wege der Rechnung. Das letztere Verfahren ist häufig das bequemere und zeigt unmittelbar, ob die betreffende Aufgabe mehr als ein Resultat liefert. Besonders wichtig wird es aber dadurch, daß sich aus der Form des gefundenen Resultates die geometrische Construction, wenn sie überhaupt möglich ist, ableiten läßt.

§. 178. Erklärung.

In dem Nachfolgenden sollen die vorkommenden geometrischen Größen nur durch ihre Maßzahlen bezeichnet werden, und zwar die geraden Linien zunächst durch einfache Buchstabenausdrücke, wie a, b, c u. s. w., folglich die Rechtecke (Parallelogramme) und Quadrate durch Ausdrücke von der Form ab und a^2. Zahlenfaktoren sollen nur zur Darstellung eines Vielfachen dienen, und es soll daher z. B. der Ausdruck $3a$ das Dreifache der Linie a, nicht aber ein Rechteck aus den Linien 3 und a bezeichnen. Dasselbe soll von dem Ausdruck $\frac{m}{n}.a$ gelten, weil der Quotient $\frac{m}{n}$ das Verhältniß zweier Linien angiebt und also nur die Bedeutung einer unbenannten Zahl, niemals die einer geometrischen Größe hat.

Anm. Durch das Hinzutreten der Zahlenfaktoren können die einfachen Bezeichnungen der Linien und Rechtecke eine zusammengesetztere Form annehmen. Will man zur Vereinfachung der Rechnung statt eines zusammengesetzteren Ausdrucks eine kürzere Form gebrauchen, so darf dies nur dann geschehen, wenn beide unzweifelhaft dieselbe Bedeutung haben. Man kann z. B. $\frac{m}{n} . \frac{v}{w} . a = b$ setzen, weil unter beiden Ausdrücken Linien zu verstehen sind, ebenso $ab = c^2$, aber nicht $ab = c$.

§. 179. Erklärung.

Ist die Maßzahl einer unbekannten Linie durch Rechnung bestimmt worden, so hat das Resultat eine mehr oder weniger zusammengesetzte Form. Um aus demselben die Construction abzuleiten, sucht man die zusammengesetzteren Formen auf gewisse einfachere zurückzuführen, deren Construction man bereits kennt. Es sind dies die folgenden, neben denen indeß auch noch andere in geeigneten Fällen anwendbar sind.

1) Ist $x = a \mp b$, so ist die unbekannte Linie gleich der Summe oder der Differenz aus zwei bekannten Linien, und die Construction ergiebt sich unmittelbar.

2) Ist $x = \frac{ab}{c}$, so ist die unbekannte Linie die vierte Proportionale zu drei bekannten Linien, und die Construction folgt aus §. 130, 1.

3) Ist $x = \sqrt{ab}$, so ist die unbekannte Linie die mittlere Proportionale zwischen zwei bekannten Linien, und die Construction folgt aus §§. 130 und 110.

4) Ist $x = \sqrt{a^2 \mp b^2}$, so ist die unbekannte Linie die Hypotenuse, oder die Cathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen zwei andere Seiten gegeben sind, (§. 107), und die Construction ergiebt sich unmittelbar.

Anm. Da die eben angeführten Ausdrücke unzweifelhaft Linien bedeuten, so lassen sich dieselben zur Abkürzung durch einfache Buchstabenausdrücke ersetzen (§. 178, Anm.).

§. 180. Aufgaben.

1) Den Ausdruck $\frac{abc}{de}$ zu construiren.

Auflösung. Es ist $\frac{abc}{de} = \frac{ab}{d} \cdot \frac{c}{e} = m \cdot \frac{c}{e} = \frac{mc}{e}$. Man sucht also die vierte Proportionale m zu a, b, d, darauf die vierte Proportionale zu m, c, e.

2) Den Ausdruck $\sqrt{ab\sqrt{2}}$ zu construiren.

Auflösung. Es ist $\sqrt{ab\sqrt{2}} = \sqrt{a\sqrt{2b^2}} = \sqrt{a\sqrt{b^2+b^2}}$.

In diesem Ausdrucke bezeichnet $\sqrt{b^2+b^2}$ die Hypotenuse m eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Catheten beide gleich b sind, und der Ausdruck $\sqrt{am}$ bezeichnet die mittlere Proportionale zwischen a und m.

§. 181. Erklärung.

Ein Ausdruck hat so viel Dimensionen, als er Faktoren enthält, welche Linien bezeichnen. Die Anzahl der Dimensionen ist also 0 bei a : b, 1 bei a, 2 bei a^2 und ab, 3 bei a^3, a^2b, abc, 4 bei a^4, a^3b u. s. w. Bei einem Ausdrucke von zusammengesetzter Form erkennt man die Zahl der Dimensionen, wenn man einfachere Bezeichnungen einsetzt (Vergl. §. 179, Anm.).

Anm. Ausdrücke von mehr als zwei Dimensionen kommen in der Planimetrie als Bezeichnungen räumlicher Größen nicht vor. Bei der Umformung von Gleichungen kann man allerdings derartige Ausdrücke erhalten, doch sind sie dann nur als Rechnungsformen zu betrachten, die erst auf Ausdrücke von höchstens zwei Dimensionen zurückgeführt werden müssen, um eine geometrische Deutung zuzulassen. Der Vollständigkeit wegen mag angeführt werden, daß Ausdrücke von drei Dimensionen in der Stereometrie die Inhalte von Körpern bezeichnen, und daß Ausdrücke von mehr als drei Dimensionen eine geometrische Bedeutung überhaupt nicht mehr haben.

§. 182. Zusatz.

Aus vorigem §. ergiebt sich, daß bei einer Gleichung zwischen räumlichen Größen alle Glieder gleiche Dimensionen haben müssen, weil man Linien nur mit Linien, Flächen nur mit Flächen vergleichen kann. Die einzelnen Glieder behalten aber auch dann noch gleichviel Dimensionen, wenn man aus der gegebenen Gleichung eine neue ableitet, weil jede Veränderung, die auf die Dimensionen eines einzelnen Gliedes von Einfluß ist, alle übrigen Glieder in derselben Art trifft. Wenn sich daher in einer Gleichung Glieder von verschiedenen Dimensionen vorfinden, die auch beim Ordnen der Gleichung nicht verschwinden, so ist ein Fehler in der Rechnung oder in den Bezeichnungen.

§. 183. Erklärung.

Um die Construction einer geometrischen Figur mit Hülfe der Rechnung zu finden, denkt man sich die Figur fertig und untersucht, welche Linien außer den gegebenen Stücken noch bekannt sein müssen, wenn die Aufgabe auf eine bereits gelöste zurückgeführt sein soll. Für diese Linien leitet man nun aus der angenommenen Figur die Bedingungsgleichungen ab, löst letztere in gewöhnlicher Art und benutzt die Resultate auf die in §§. 179 und 180 angegebene Weise.

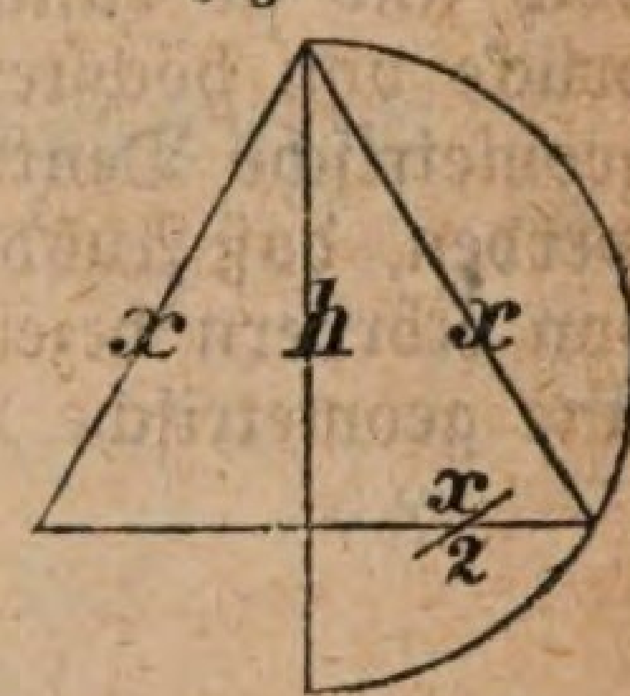
Ein Resultat mit negativem Vorzeichen ist zunächst unbrauchbar, weil eine Linie nicht negativ sein kann, deutet aber auf eine verwandte Aufgabe hin (Vergl. Arithm. I, §. 130). Man hat alsdann zu untersuchen, ob nicht die unbekannte Linie x, nach welcher die Bestimmungsgleichung zu lösen ist, eine solche Lage annehmen kann, daß in Folge der veränderten Lage auch

das Vorzeichen von x in der Bestimmungsgleichung sich ändern muß. Im Allgemeinen entspricht der veränderten Bestimmungsgleichung eine derartige Fassung der Aufgabe, daß x nicht mehr als Verlängerung einer bestimmten Linie auftritt, sondern als Verkürzung, oder umgekehrt (Vergl. §§. 116 und 152).

§. 184. Aufgaben.

I. Aus der Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks die Seite x desselben zu berechnen und zu construiren.

Fig. 120.



Berechnung. Es ist $h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4}$, daher

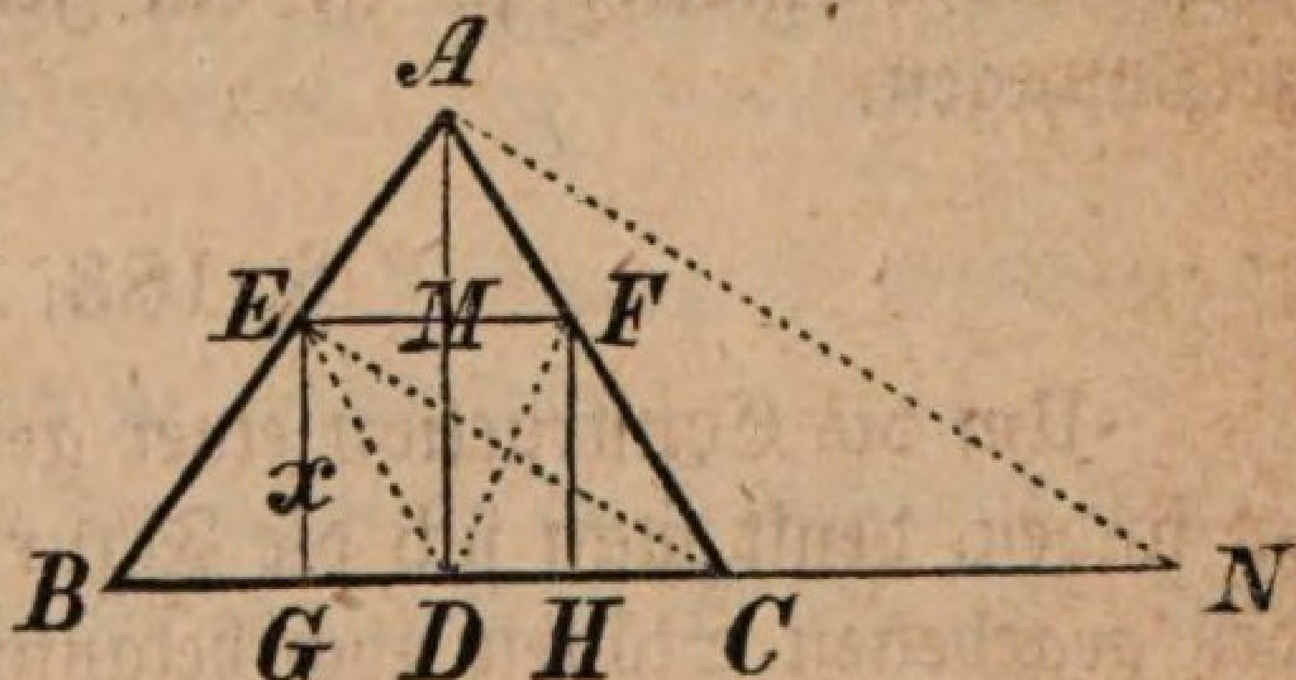
$$x^2 = \frac{4h^2}{3},$$

$$x = \sqrt{h \cdot \frac{4h}{3}}.$$

Construction. Man verlängere h um den dritten Theil, beschreibe über der so verlängerten Linie als Durchmesser einen Kreis und construire (nach §. 110) die mittlere Proportionale zwischen h und $\frac{4h}{3}$.

II. Die Seite x eines Quadrates zu berechnen und zu construiren, dessen Ecken in den drei Seiten eines Dreiecks ABC so liegen, daß auf die Seite BC zwei Ecken fallen.

Fig. 121.



Berechnung. Es sei EFGH das gesuchte Quadrat, und man bezeichne EG mit x, BC mit c, die Höhe AD mit h.

Nun ist $\triangle ABC = \triangle AED + \triangle AFD + \triangle EBD + \triangle FCD$, oder

$$\frac{BC \,.\, AD}{2} = \frac{AD}{2}(EM + MF) + \frac{EG}{2}(BD + DC),$$

oder $\frac{c \,.\, h}{2} = \frac{h \,.\, x}{2} + \frac{c \,.\, x}{2}$,

daher $x = \frac{c \,.\, h}{c + h}$.

Construction. Man verlängere BC über C hinaus um das Stück $CN = h$, verbinde N mit A und ziehe aus C eine Linie parallel mit NA. Der Punkt, in welchem AB von dieser Parallelen geschnitten wird, ist die Quadratecke E.

Beweis. Es ist $\triangle EBC \sim \triangle ABN$, daher $EG : BC = AD : BN$, oder $EG : c = h : (c + h)$, oder $EG = ch : (c + h) = x$.

III. Ein Rechteck xy aus dem Umfange 2a und dem Inhalte m^2 zu berechnen und zu construiren.

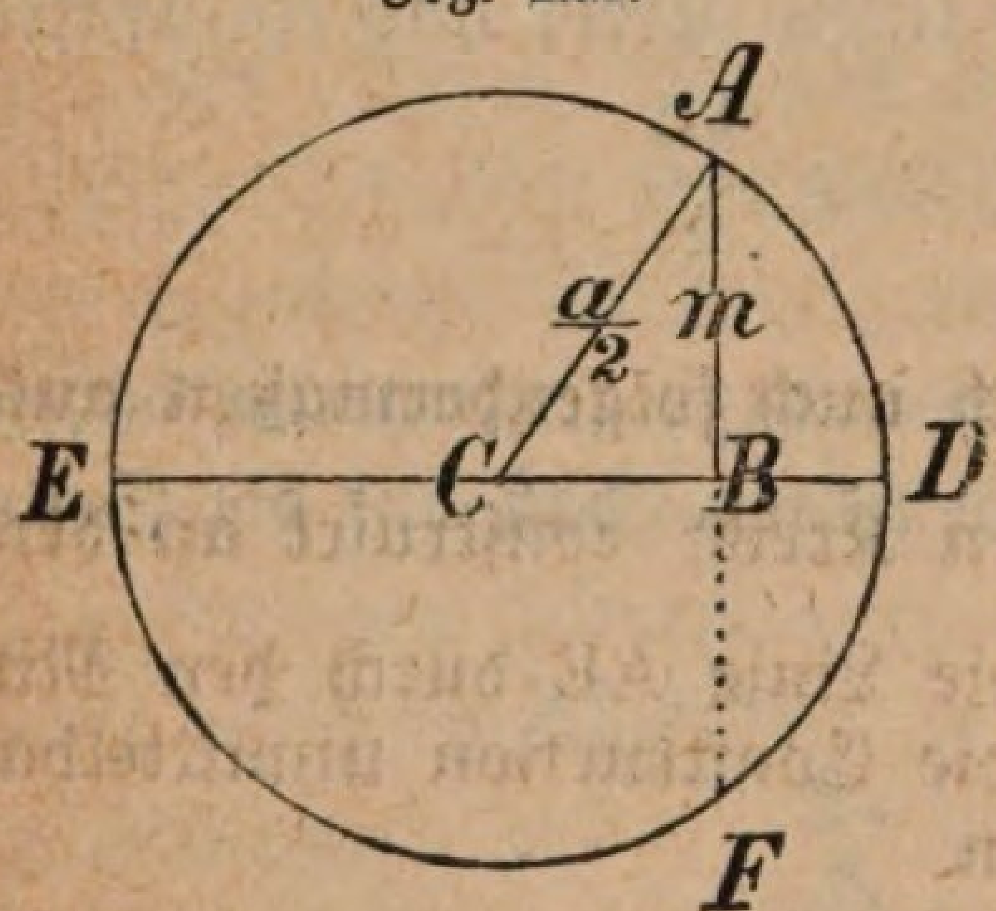
Berechnung. Es ist $x + y = a$, $x \cdot y = m^2$, folglich

$$1)\ x(a = x) = m^2, \text{ daher}$$

$$2)\ x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2},\quad y = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}.$$

Construction. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC aus

Fig. 122.



der Linie m als Cathete und der Linie $\frac{a}{2}$ als Hypotenuse. Alsdann ist $CB = \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2}$. Trägt man nun aus C auf der nach beiden Seiten verlängerten Linie CB das Stück

$CA = CD = CE = \frac{a}{2}$ ab, so ist

$$BD = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2} = y,$$

$$BE = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - m^2} = x.$$

Determination. Es darf m^2 nicht größer als $\frac{a^2}{4}$ sein.

Anm. Die angegebene Construction läßt sich auch folgendermaßen ausführen: Man beschreibt mit dem Radius $\frac{a}{2}$ einen Kreis, zieht in demselben die Sehne $AF = 2m$, ferner den Durchmesser DE durch die Mitte B der Sehne hindurch. In dieser Form läßt sich die Construction unmittelbar aus Gleichung 1) und aus §. 148, 1 (oder aus §. 110) ableiten.

IV. Ein Rechteck xy aus der Differenz d der Seiten x und y und aus dem Inhalte m^2 zu berechnen und zu construiren.

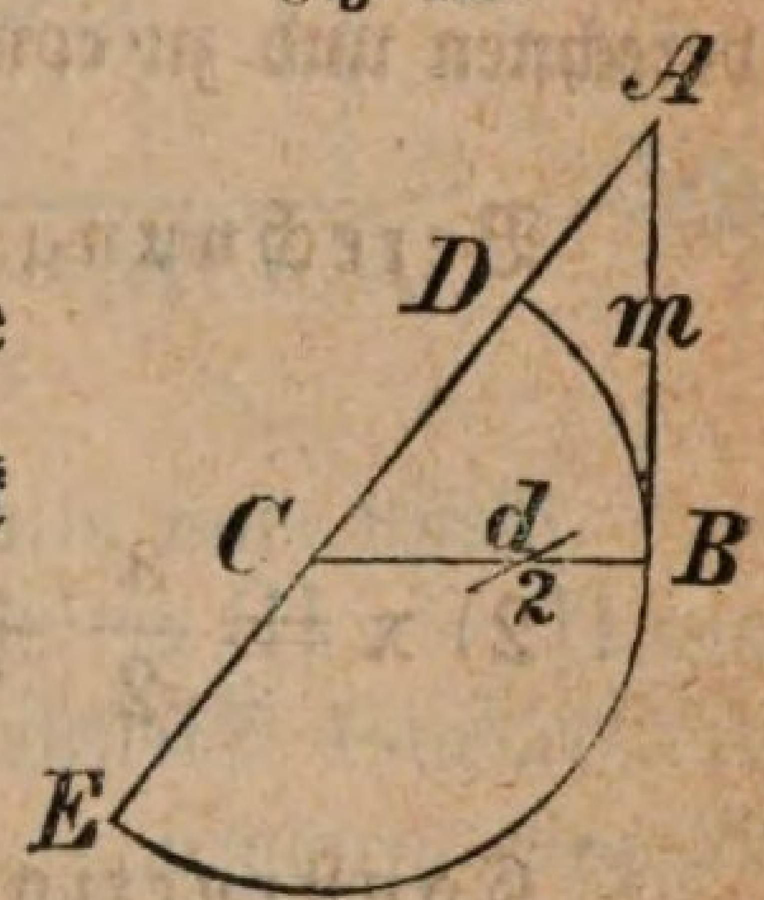
Berechnung. Ist x die kleinere Seite, so ist $y = x + d$, folglich

$$1)\ x(x + d) = m^2, \text{ daher}$$

$$2)\ x = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}, \quad y = \frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}.$$

Construction. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC aus den Linien m und $\frac{d}{2}$ als Catheten. Alsdann ist $AC = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}$. Trägt man nun auf der Linie CA und auf ihrer Verlängerung über C hinaus das Stück $CB = CD = CE = \frac{d}{2}$ ab, so ist

Fig. 123.



$$AD = -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2} = x,$$

$$AE = +\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2} = y.$$

Anm. Die angegebene Construction läßt sich auch folgendermaßen ausführen: Man beschreibt mit dem Radius $\frac{d}{2}$ einen Kreis, construirt an denselben die Tangente $BA = m$ und zieht aus A die Linie AE durch den Mittelpunkt C hindurch. In dieser Form läßt sich die Construction unmittelbar aus der Gleichung 1) und aus § 148, 3 ableiten.

V. Die Seite x eines Quadrates aus der Differenz d zwischen der Diagonale und der Seite zu berechnen und zu construiren.

Berechnung. Das Quadrat hat die Seite x, die Diagonale $x + d$. Es ist also $(x + d)^2 = x^2 + x^2$, oder $x^2 + 2xd + d^2 = 2x^2$, daher $x = d + \sqrt{2d^2}$.

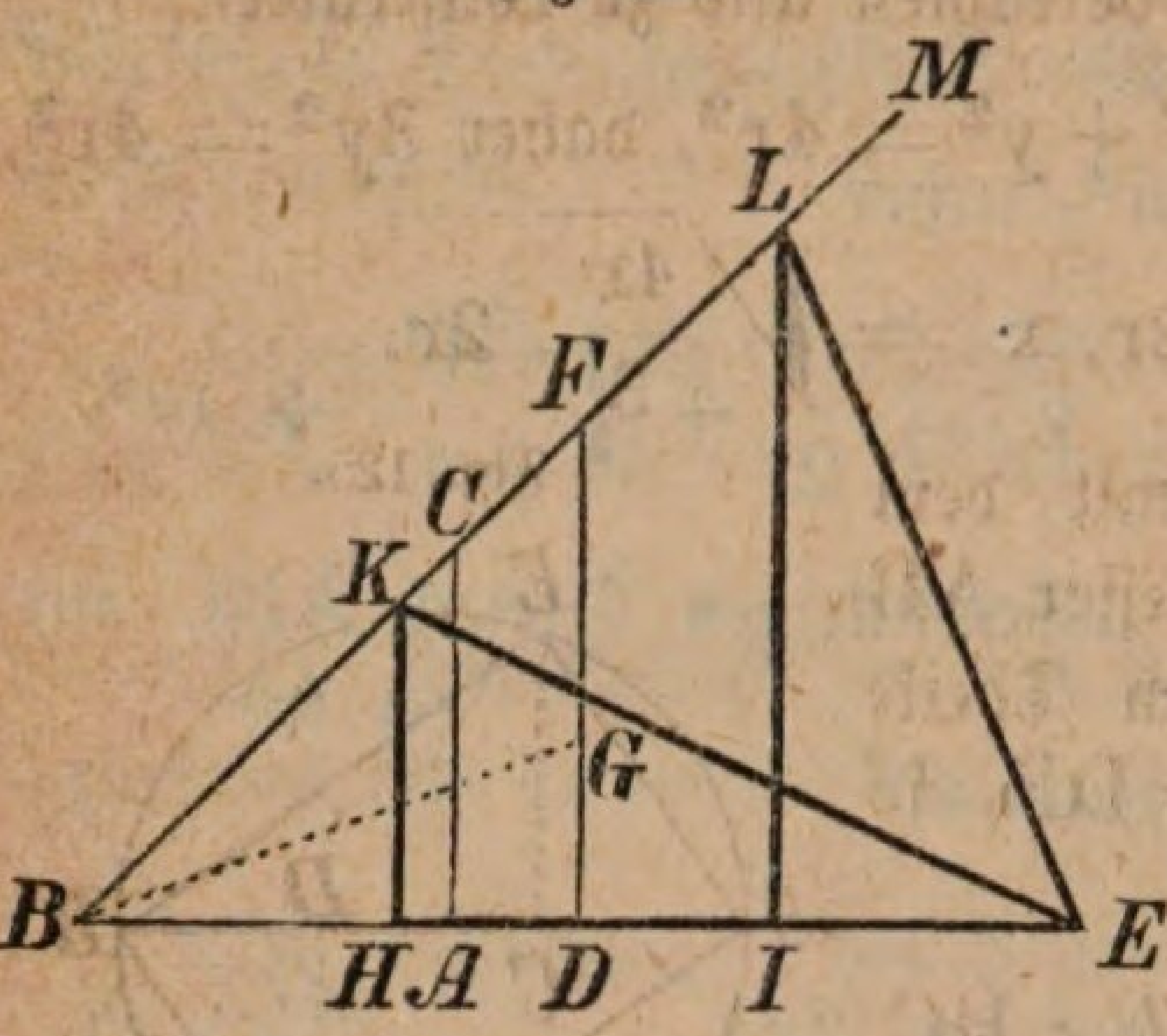
Construction. Man zeichne ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aus der Linie d als Cathete und verlängere die Hypotenuse desselben um d. Die verlängerte Linie ist die Seite des gesuchten Quadrates.

VI. Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Hypotenuse c und der Summe s der beiden Catheten x und y zu berechnen und zu construiren.

Berechnung. Es ist $x + y = s$, $x^2 + y^2 = c^2$. Folglich ist $x = \frac{1}{2}s \mp \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - (\frac{1}{2}s)^2}$, $y = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - (\frac{1}{2}s)^2}$.

Construction. Man zeichne das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck ABC, in welchem $AB = AC = \frac{1}{2}c$, folglich $BC = \sqrt{\frac{1}{2}c^2}$ ist, verlängere BA über A hinaus und trage $BD = \frac{1}{2}s$, $BE = s$ ab. Errichtet man nun aus D die Senkrechte DF und zieht $BG = BC$, so ist $GD = \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - (\frac{1}{2}s)^2}$, und trägt man auf beiden Seiten des Punktes D das Stück $DG = DH = DI$ ab, so ist

Fig. 124.



$$BH = EI = \frac{1}{2}s - \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - (\frac{1}{2}s)^2},$$
$$BI = EH = \frac{1}{2}s + \sqrt{\frac{1}{2}c^2 - (\frac{1}{2}s)^2}.$$

Wenn man also schließlich aus H und I die Senkrechten $HK = HB$ und $IL = IB$ errichtet und K und L mit E verbindet, so erhält man zwei (congruente) Dreiecke KHE und EIL, welche beide den Forderungen der Aufgabe genügen.

Anm. Da die Linien EK und EL gleich c sind, so läßt sich die angegebene Construction vereinfachen. Man zieht die Linie $BE = s$, ferner aus B die Linie BM unter einem Winkel von 45°, beschreibt aus E mit dem Radius c einen Bogen und fällt aus den Punkten K und L, in welchen BM von dem Bogen geschnitten wird, die Senkrechten KH und LI.

VII. Ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck aus dem Umfange u zu berechnen und zu construiren.

Berechnung. Bezeichnet man die Hypotenuse durch y, jede Cathete durch x, so ist $y + 2x = u$, $y^2 = 2x^2$. Folglich ist

$$2x^2 = (u - 2x)^2 = u^2 - 4ux + 4x^2, \text{ daher}$$
$$x = u - \sqrt{\tfrac{1}{2}u^2}, \quad y = -u + \sqrt{2u^2}.$$

Construction. Sie ist ähnlich, wie die in V angegebene.

VIII. Ein Rechteck xy aus der Differenz d zweier Seiten und dem Radius r des umgeschriebenen Kreises zu berechnen und zu construiren.

Berechnung. Es ist $x = y + d$, $x^2 + y^2 = 4r^2$, folglich

$$x = \tfrac{1}{2}d + \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}d^2}, \quad y = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{2r^2 - \tfrac{1}{4}d^2}.$$

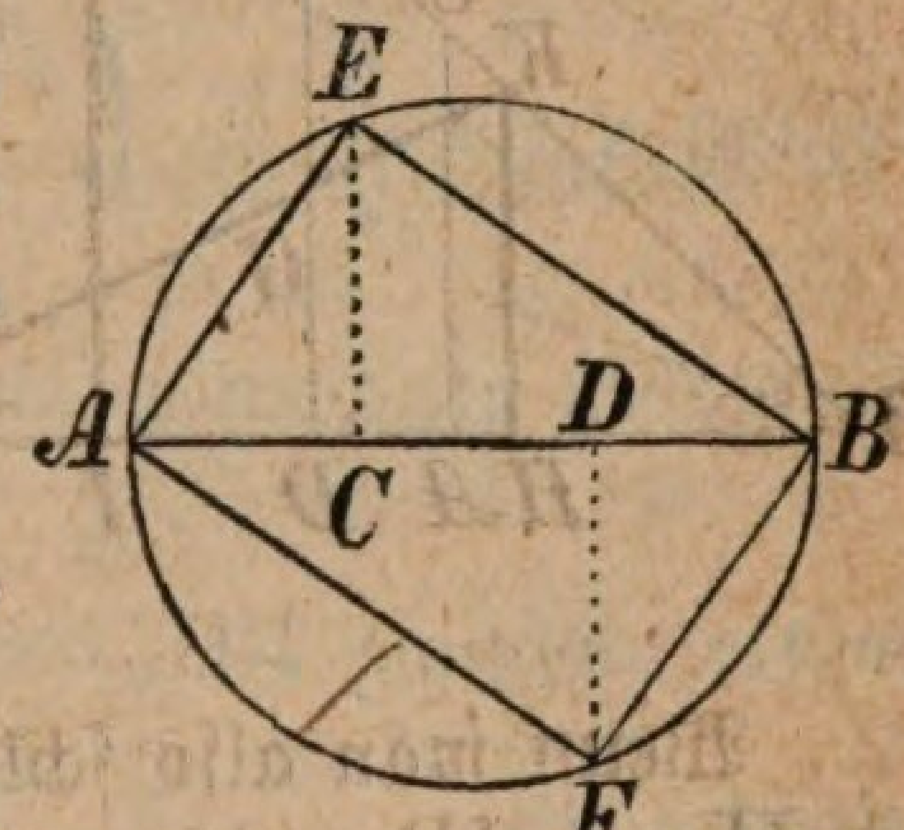
Construction. Sie ist ähnlich, wie die in VI angegebene.

IX. Ein Rechteck xy aus dem Radius r des umgeschriebenen Kreises und dem Verhältniß $x : y = \sqrt{2} : 1$ zu berechnen und zu construiren.

Berechnung. Es ist $x^2 = 2y^2$, $x^2 + y^2 = 4r^2$, daher $3y^2 = 4r^2$, folglich $y = \sqrt{\frac{4r^2}{3}} = \sqrt{\frac{2r}{3} \cdot 2r}$, $x = \sqrt{\frac{4r}{3} \cdot 2r}$.

Construction. Beschreibt man mit dem Radius r einen Kreis, theilt den Durchmesser AB in drei gleiche Theile und errichtet aus den Theilpunkten C und D die Senkrechten CE und DF, so ist AEBF das gesuchte Rechteck.

Fig. 125.



Beweis. Es ist $AE^2 : BE^2 = AC : BC$, oder $AE : BE = \sqrt{1} : \sqrt{2}$.

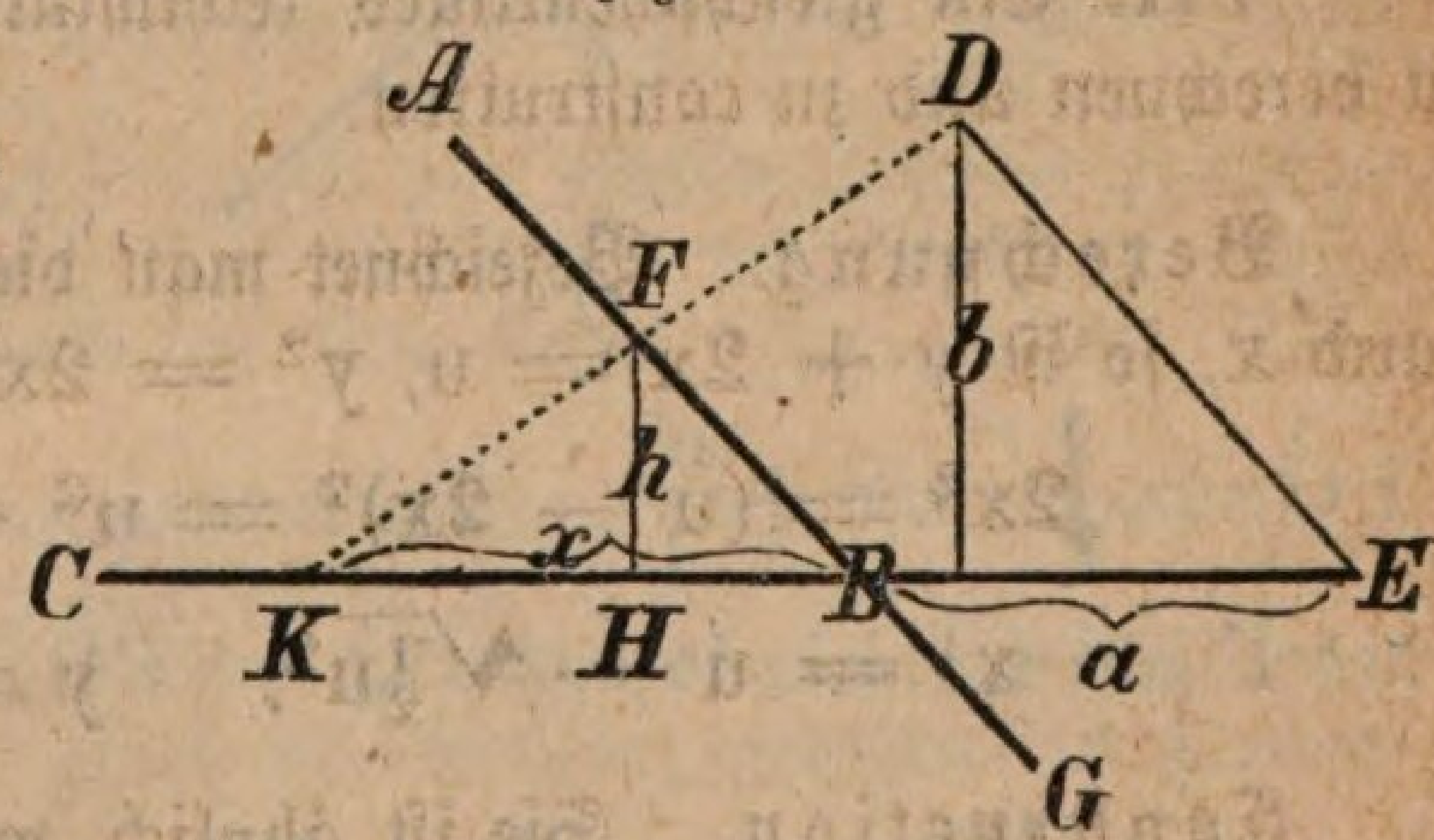
Anm. Diese Construction wird angewendet, um aus einem Baumstamme einen Balken von größter Tragkraft zu schneiden.

X. Aus dem Punkte D, der außerhalb der Winkelebene ABC liegt, eine Linie DK so zu ziehen, daß das abgeschnittene Dreieck FKB den Inhalt m^2 erhält.

Berechnung. Verlängert man CB über B hinaus und zieht DE || AB, so ist △ DKE ∾ △ FKB. Sind nun b und h die Höhen dieser Dreiecke, und bezeichnet man KB durch x, BE durch a, so ist

$$x : h = (a + x) : b.$$

Fig. 126.



Aus dieser Gleichung läßt sich h eliminiren. Es ist nämlich

$$\frac{xh}{2} = m^2,$$

$$\text{folglich } h = \frac{2m^2}{x}.$$

Setzt man diesen Werth ein, so ist

$$x : \frac{2m^2}{x} = (a + x) : b,$$

$$\text{oder} \quad x^2 b = 2m^2 (a + x),$$

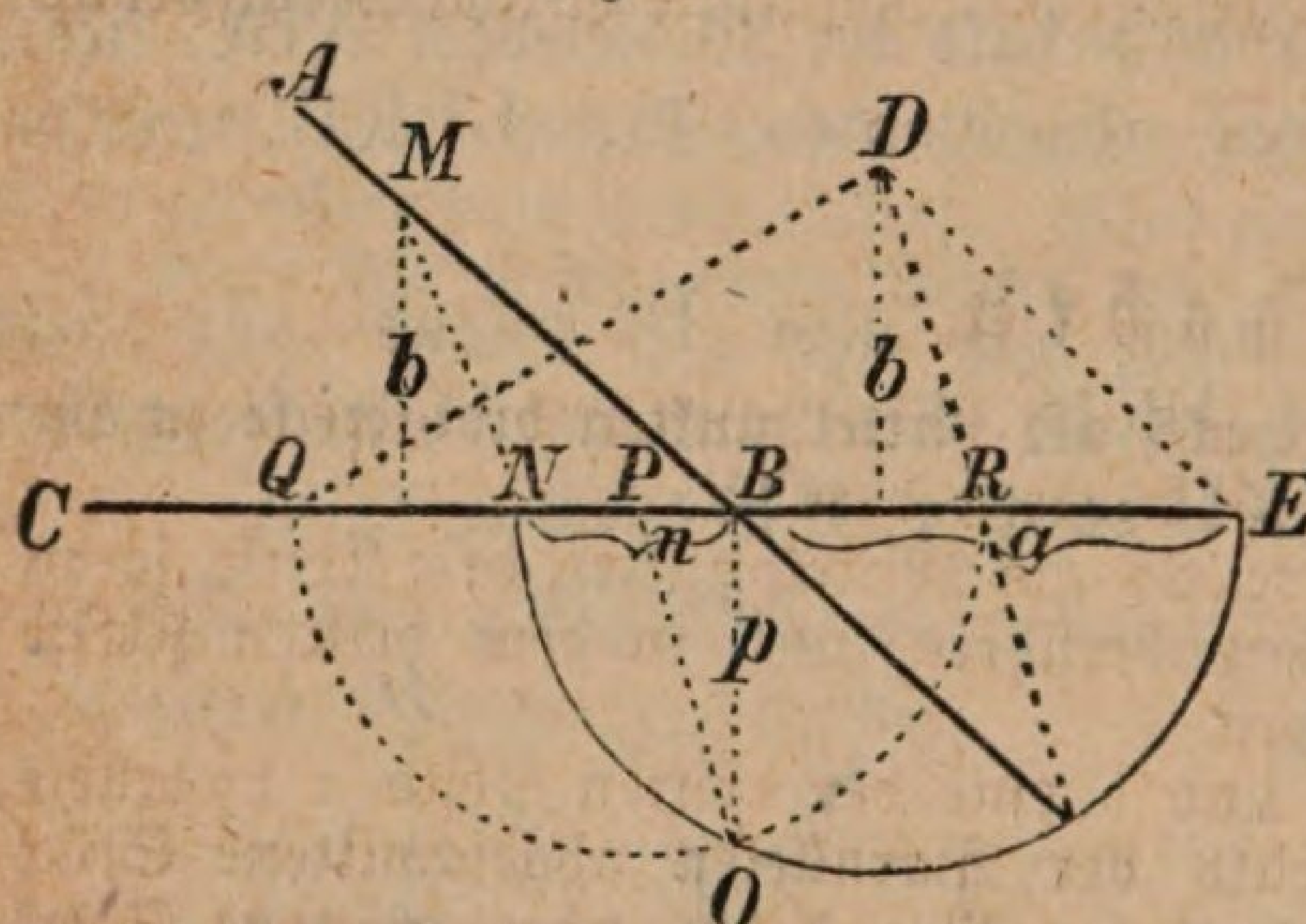
$$\text{oder} \quad x^2 = \frac{2m^2}{b}(a + x) = n(a + x),$$

$$\text{daher} \quad x = \frac{n}{2} \mp \sqrt{na + \frac{n^2}{4}}.$$

Das Resultat $\frac{n}{2} - \sqrt{na + \frac{n^2}{4}} = -\left(-\frac{n}{2} + \sqrt{na + \frac{n^2}{4}}\right)$ ist negativ, also zunächst unbrauchbar (§. 183). Mit verändertem Vorzeichen gehört es zu der Bestimmungsgleichung $x^2 = n(a - x)$, und diese entsteht, wenn man das Dreieck nicht von der Ebene des Winkels ABC, sondern von der seines Scheitelwinkels GBE abschneidet. Die vollständige Auflösung $x = \frac{n}{2} \mp \sqrt{na + \frac{n^2}{4}}$ genügt also diesen beiden verwandten Aufgaben gleichzeitig, und zwar hat man entweder $x = \frac{n}{2} + \sqrt{na + \frac{n^2}{4}}$ in der Richtung BC, oder $x = -\frac{n}{2} + \sqrt{na + \frac{n^2}{4}}$ in der Richtung BE abzutragen.

Construction. Man construire in der Winkelebene ABC das Dreieck $MNB = m^2$, so daß seine Höhe gleich b ist. Dann ist

Fig. 127.



$$NB = \frac{2m^2}{b} = n.$$

Beschreibt man ferner über NE einen Halbkreis und errichtet aus B das Loth $BO = p$, so ist $p^2 = na$. Halbirt man ferner NB in P, so ist $PB = \frac{n}{2}$, folglich $PO = \sqrt{na + \frac{n^2}{4}}$. Trägt man endlich PO zu beiden Seiten des Punktes P auf CE ab, so daß $PQ = PR = PO$ ist, so erhält man

$$BR = -PB + PR = -\frac{n}{2} + \sqrt{na + \frac{n^2}{4}},$$

$$BQ = +PB + PQ = +\frac{n}{2} + \sqrt{na + \frac{n^2}{4}}.$$

XI. Eine Linie a nach stetiger Proportion zu schneiden.

Berechnung. Es ist $a : x = x : (a - x)$, daher

$$x^2 = a^2 - ax,$$

$$x = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Das negative Resultat $-\left(\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}\right)$ wird mit veränderter Vorzeichen aus der Gleichung $a : x = x : (a + x)$ erhalten, und diese entsteht, wenn x, wie vorher, den größeren Abschnitt bezeichnen soll, hingegen a nicht die ganze Linie, sondern den kleineren Abschnitt. Die vollständige Auflösung $x = -\frac{a}{2} \mp \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ genügt also gleichzeitig den beiden verwandten Aufgaben, eine Linie a nach stetiger Proportion zu schneiden, oder zum kleineren Abschnitte a den größeren zu finden. Im ersteren Falle trägt man auf a die Linie $-\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = v$ ab, im letzteren verlängert man a um die Linie $\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = a + v$.

Construction. Dieselbe ist für beide Fälle bereits in §. 152 gegeben, und zwar so, daß sie dem hier gefundenen Resultate durchaus entspricht.

Aufgaben.

1) Aus den drei Ecken eines Dreiecks als Mittelpunkten drei Kreise zu beschreiben, von welchen jeder die beiden anderen berührt.

2) Aus den drei Ecken eines Dreiecks als Mittelpunkten drei Kreise so zu beschreiben, daß zwei sich von außen berühren und in dem dritten Kreise liegen und von diesem berührt werden.

3) Durch zwei Dreiecksseiten a und b eine der dritten Seite c parallele Linie so zu legen, daß das oberhalb der Parallelen abgeschnittene Stück von a so groß wird wie das unterhalb der Parallelen abgeschnittene Stück von b

4) Dieselbe Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, daß die beiden abgeschnittenen Stücke sich verhalten sollen wie m zu n.

5) In einem gleichschenkligen Dreiecke eine der Grundlinie c parallele Linie zu ziehen, die dem Schenkelabschnitte gleich ist, welcher zwischen der Grundlinie und der gezogenen Parallelen liegt.

6) Dieselbe Aufgabe für den Fall, daß die Parallele durch die Verlängerungen der Schenkel geht.

7) Dieselben Bedingungen, wie in 5), aber x soll so groß sein wie die Summe der erwähnten Stücke.

8) Dieselben Bedingungen, wie in 6), aber x soll so groß sein wie die Summe der erwähnten Stücke.*)

9) Die Aufgabe 7) für ein ungleichseitiges Dreieck.

---

*) Mit Hülfe von 7) und 8) löst man auch die Aufgaben, in oder auf einem gegebenen Kreise drei gleich große Kreise zu beschreiben, welche den gegebenen und sich selbst gegenseitig berühren.

10) Die Aufgabe 8) für ein ungleichseitiges Dreieck.

11) Ein rechtwinkliges Dreieck aus der Cathete b und aus der Summe a der andern Cathete x und der Hypotenuse y zu construiren.

12) Eine gegebene Linie a um ein Stück x so zu verlängern, daß die Summe aus dem Quadrate der Verlängerung und dem Quadrate der ganzen verlängerten Linie mmal so groß wird, als das Quadrat der gegebenen Linie.

13) Ein Quadrat aus der Summe s der Diagonale x und der Seite y zu construiren.

14) Ein Rechteck aus der Diagonale a und der Differenz d der beiden Seiten x und y zu construiren.

15) Ein gleichseitiges Dreieck zu construiren, wenn die Differenz d der Seite x und der Höhe y gegeben ist.

16) Ein gleichschenkliges Dreieck aus dem Schenkel a und der Summe s der Grundlinie 2x und der Höhe y zu construiren.

17) Ein Rechteck xy aus der Diagonale d und dem Inhalte $a^2 (= x \cdot y)$ zu construiren.

18) In ein gegebenes Dreieck ein Rechteck einzuzeichnen, dessen Seiten x und y sich verhalten wie m zu n, und zwar so, daß die Seite x vollständig in der Dreiecksseite a liegt.

19) In einen Halbkreis ein Quadrat einzuzeichnen.

20) In einen Halbkreis ein Rechteck von gegebenem Inhalte m^2 einzuzeichnen.

21) Eine gegebene Linie a in zwei Theile zu theilen, so daß das Quadrat über dem einen Theile gleich dem gleichseitigen Dreiecke über dem andern Theile wird.

22) Ein Trapez durch eine Linie x zu halbiren, welche den parallelen Seiten a und b (wobei $a < b$) parallel geht.

23) In ein gegebenes Dreieck ein anderes von gegebenem Inhalte F einzutragen, so daß die Ecken des letzteren in die Seiten des ersteren fallen, und die abwechselnden Abschnitte der Seiten des ersteren einander proportionirt sind.

24) Innerhalb eines Kreises ist ein Punkt gegeben. Durch denselben eine Sehne von gegebener Länge 2c zu ziehen.

25) Ein Dreieck aus den Seiten a und b und der Halbirungslinie d des eingeschlossenen Winkels zu construiren.

Auflösungen.

1) Sind a, b, c die Dreiecksseiten, x, y, z die Radien der drei Kreise, so daß der zu x gehörige Kreis der Seite a gegenüberliegt u. s. w., so ist

$$x = \frac{-a + b + c}{2}; \; y = \frac{a - b + c}{2}; \; z = \frac{a + b - c}{2}.$$

2) Ist x der Radius des größeren Kreises, so ist $x = \frac{a + b + c}{2}$. Die anderen Radien wie bei 1).

3) $x = \frac{ab}{a + b}$; 4) $x = \frac{mab}{mb + na}$; $y = \frac{nab}{mb + na}$.

5) Ist der Schenkel = a, so ist $x = \frac{ac}{a + c}$; 6) $x = \frac{ac}{a - c}$;

7) $x = \frac{2ac}{2a + c}$; 8) $x = \frac{2ac}{2a - c}$; 9) $x = \frac{(a + b)c}{a + b + c}$;

10) $x = \frac{(a + b)c}{a + b - c}$; 11) $x = \frac{a^2 - b^2}{2a}$; $y + \frac{a^2 + b^2}{2a}$;

12) $x = \frac{-a + \sqrt{2ma^2 - a^2}}{2}$;

13) $y = -s + \sqrt{2s^2}$; $x = 2s - \sqrt{2s^2}$;

14) $x = \frac{d + \sqrt{2a^2 - d^2}}{2}$; $y = \frac{-d + \sqrt{2a^2 - d^2}}{2}$;

15) $x = 4d + 2\sqrt{3d^2}$;

16) $x = \frac{2b \mp \sqrt{5a^2 - s^2}}{5}$; $y = \frac{b \pm 2\sqrt{5a^2 - s^2}}{5}$;

17) $x = \sqrt{\frac{d^2 + \sqrt{d^4 - 4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} + \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$;

$y = \sqrt{\frac{d^2 - \sqrt{d^4 - 4a^4}}{2}} = \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - \sqrt{d^2 - 2a^2}}{2}$.

18) Ist die zu a gehörige Höhe $= h$, so ist $x = \frac{mah}{mh + na}$; $y = \frac{nah}{mh + na}$.

19) Ist x die Quadratseite, r der Radius, so ist $x = \sqrt{\frac{4r^2}{5}}$.

20) Ist x die im Durchmesser liegende Grundlinie, y die Höhe, so ist:
$x = \sqrt{r^2 + m^2} \pm \sqrt{r^2 - m^2}$; $y = \frac{\sqrt{r^2 + m^2} \mp \sqrt{r^2 - m^2}}{2}$.

21) Ist die Dreiecksseite $= x$, so ist $x = \frac{2a^2}{2a + \sqrt{a\sqrt{3a^2}}}$.

22) $x = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2}$.

23) Ist c die eine Seite des gegebenen Dreiecks, h die zugehörige Höhe, I der Inhalt, x der auf c durch das andere Dreieck gebildete Abschnitt, und wird $\frac{I - F}{3} = \frac{nh}{2}$ gesetzt, so ist $nc = x(c - x)$. (Ueber die Construction dieses Ausdrucks vergleiche Aufg. III, Anm.).

24) Bezeichnet man die Theile, in welche ein durch diesen Punkt gehender Durchmesser getheilt wird, durch a und b, so erhält man für die beiden Theile der Sehne: $x = c + \sqrt{c^2 - ab}$; $y = c - \sqrt{c^2 - ab}$;

25) $x = \frac{a + b}{a}\sqrt{\frac{a(ab - d^2)}{b}}$.

Druck von Weniger & Co. in Dessau.